

*UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS*  
*FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO*  
*DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS*

Dissertação de Mestrado

DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA  
TRANSIENTE NO TEMPO EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

**Eng.º Leandro Prearo Millan**

**Campinas – SP**

**2009**

*UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS*  
*FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO*  
*DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS*

DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA  
TRANSIENTE NO TEMPO EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

**Eng.º Leandro Prearo Millan**

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior**

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

**Campinas – SP**

**2009**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M611d	<p>Millan, Leandro Prearo</p> <p>Determinação da distribuição de temperatura transiente no tempo em elementos estruturais utilizando o método dos elementos de contorno / Leandro Prearo Millan. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.</p> <p>Orientador: Leandro Palermo Junior.</p> <p>Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.</p> <p>1. Método dos elementos de contorno. 2. Calor transmissão. 3. Soluções analíticas. I. Palermo Junior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.</p>
-------	---

Título em Inglês: Determination of transient temperature distribution in structural elements using the boundary elements method

Palavras-chave em Inglês: Boundary Element Method, Heat transfer, Analytical solutions

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Paul Willian Partridge, Francisco Antonio Menezes

Data da defesa: 23/04/2009


Programa de Pós Graduação: Engenharia Civil

*UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS*  
*FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO*  
*DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS*

DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA TRANSIENTE NO TEMPO EM  
ELEMENTOS ESTRUTURAIS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Eng.º Leandro Prearo Millan

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

Presidente e Orientador(a)/Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo  
FEC/UNICAMP



Prof. Dr. Paul William Partridge

Universidade de Brasília / UNB



Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo FEC/UNICAMP

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Adilson e Maria de Lourdes

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Junior, agradeço pelo incentivo e grande atenção dada durante a elaboração desse trabalho, o qual sem ele não seria possível.

A meus amigos Pedro, Ingo e Bruno, que sempre me apoiaram nas horas boas e nas horas difíceis.

A Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, pelas oportunidades a mim oferecidas desde a graduação.

# SUMÁRIO

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos	x
Resumo	xi
1. Introdução	1
2. Revisão Bibliográfica	4
3. Fundamentos Matemáticos	6
3.1. Notação Tensorial	6
3.2. Operadores Matemáticos	7
3.3. Operações Vetoriais	8
3.4. Sistema de Coordenadas	8
3.4.1. Sistema de Coordenadas Curvilíneas Quaisquer	8
3.4.2. Coordenadas Cilíndricas	11
3.4.3. Coordenadas Esféricas	12
3.5. Teoremas e Identidades	13
3.5.1. Primeira Identidade de Green	13
3.5.2. Segunda Identidade de Green	14
3.6. Delta de Dirac	15
4. Fundamentos de Transferência de Calor	16
4.1. Condução	16
4.1.1. Lei de Condução de Fourier	16
4.1.2. A Equação de Difusão de Calor	18
4.2. Convecção	21
4.3. Radiação	22
5. Estado Auxiliar	24
5.1. Potencial Gerado por um Ponto Fonte	24
5.1.1. Equilíbrio	24
5.1.2. Transiente	26
5.2. Solução Fundamental para o Caso Bi-Dimensional	27
5.2.1. Equilíbrio	27
5.2.2. Transiente	29
6. Método dos Elementos de Contorno	30
6.1. Formulação MEC	30
6.1.1. Equilíbrio	30
6.1.2. Transiente – Solução Dependente do Tempo	33

6.2. Elemento de Contorno	36
6.2.1. Equilíbrio	36
6.2.2. Transiente	38
6.3. Integração Numérica do Núcleo não Singular	39
6.3.1. Equilíbrio	39
6.3.2. Transiente	40
6.4. Integração Analítica do Núcleo Singular	42
6.4.1. Equilíbrio	44
6.4.1.1. Elemento Contínuo	44
6.4.1.2. Elemento Descontínuo	46
6.4.2. Transiente	48
6.4.2.1. Elemento Contínuo não Singular no Tempo	48
6.4.2.2. Elemento Contínuo Singular no Tempo	50
6.4.2.3. Elemento Descontínuo não Singular no Tempo	52
6.4.2.4. Elemento Descontínuo Singular no Tempo	54
6.5. Condições Iniciais e de Contorno	55
6.5.1. Equilíbrio	55
6.5.2. Transiente	57
6.6. Solução do Sistema Linear de Equações	60
6.6.1. Equilíbrio	60
6.6.2. Transiente	63
6.7. Cálculo da Temperatura nos Pontos Internos	67
6.7.1. Equilíbrio	67
6.7.2. Transiente	69
7. Técnica de Integração Numérica	71
8. Algoritmos utilizados nas Funções Matemáticas	78
9. Esquema do Programa Computacional Desenvolvido	81
9.1. Estrutura dos Arquivos do Programa	83
9.2. Diagrama de Classes do Programa	85
9.3. Equilíbrio – Diagrama de Fluxo	88
9.4. Transiente – Diagrama de Fluxo	89
10. Exemplos Numéricos	90
10.1. Exemplo 1	90
10.2. Exemplo 2	92
10.3. Exemplo 3	97
10.4. Exemplo 4	99
11. Conclusão	103
12. Bibliografia	106



## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 -	Deslocamentos elementares segundo direções que são mutuamente perpendiculares entre si no ponto P	10
Figura 3.2 -	Paralelepípedo distorcido de dimensões infinitesimais de um campo vetorial diferenciável A	11
Figura 3.3 -	Sistema de Coordenadas Cilíndricas	12
Figura 3.4 -	Sistema de Coordenadas Esféricas	13
Figura 3.5 -	A distribuição Delta de Dirac	16
Figura 4.1 -	Relação entre o sistema de coordenadas, a direção do fluxo de calor e o gradiente de temperatura unidimensional	18
Figura 4.2 -	Volume de controle diferencial em coordenadas cartesianas	19
Figura 4.3 -	Transferência de calor por convecção em superfície de forma arbitrária	22
Figura 5.1 -	Hemisfério centrado no ponto X'	26
Figura 5.2 -	Linha de Pontos Fontes no eixo Z	28
Figura 6.1 -	Círculo de raio $\epsilon$ centrado no ponto fonte X'	31
Figura 6.2 -	Funções de forma do elemento linear	38
Figura 6.3a -	Exemplo de chapa com numeração de nós e elementos	44
Figura 6.3b -	Detalhe dos pontos de colocação movidos para dentro do elemento	44
Figura 6.4 -	Funções de forma em coordenadas globais	45
Figura 6.5 -	Funções de forma em coordenadas globais com nó deslocado para dentro do elemento	47
Figura 6.6 -	Exemplo de Condições de Contorno em Chapa	62
Figura 8.1 -	Gráfico da função $E_1$	79
Figura 8.2 -	Gráfico da função $\text{erf}(x)$	80
Figura 9.1 -	Estrutura de dependência de arquivos	85
Figura 9.2 -	Diagrama de Classes padronização UML (Unified Modeling Language)	88
Figura 10.1 -	Geometria e condições de contorno do exemplo 1	91
Figura 10.2 -	Gráfico dos resultados do exemplo 1	93
Figura 10.3 -	Geometria e condições de contorno do exemplo 2	93
Figura 10.4 -	Gráfico dos resultados do exemplo 2	96
Figura 10.5 -	Geometria e condições de contorno do exemplo 3	98
Figura 10.6 -	Gráfico dos resultados do exemplo 3	100
Figura 10.7 -	Geometria, condições de contorno e elementos do exemplo 4	101

## LISTA DE TABELAS

Tabela 9.1 -	Estrutura de Arquivos do Programa	84
Tabela 9.2 -	Quadro da classe Sistema	86
Tabela 9.3 -	Quadro da classe Linear	87
Tabela 10.1a-	Resultados Exemplo 1	92
Tabela 10.1b-	Resultados Exemplo 1	92
Tabela 10.2a -	Resultados Exemplo 2	94
Tabela 10.2b -	Resultados Exemplo 2	95
Tabela 10.2c -	Resultados da variação de parâmetros exemplo 2	97
Tabela 10.3 -	Resultados Exemplo 3	99
Tabela 10.4a -	Resultados Exemplo 4	102
Tabela 10.4b-	Resultados da variação de parâmetros exemplo 4	103

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\epsilon_{ijk}$	Tensor unitário alternante	
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker	
$\phi$	Grandeza escalar ou função escalar	
u	Vetor ou função vetorial	
$\theta$	Coordenada polar	
$\Delta$	Delta de Dirac, na forma $\Delta(x)$ para $x'=0$ e $\Delta(x,x')$ ou $\Delta(x-x')$ para $x'\neq 0$	
T	Temperatura	
q	Fluxo de calor	
K	Condutividade térmica (W/m K)	
k	Difusividade térmica $k = K/\rho c$	
$\rho$	Massa específica (Kg/m³)	
$c_p$	Calor específico a pressão constante (J/Kg K)	
$\dot{E}_g$	Taxa de geração de energia (W)	
$\dot{E}_{ar}$	Taxa de elevação da energia armazenada no interior de um volume de controle (W)	
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção (W/m² K)	
$E_b$	Poder emissivo total de um corpo negro	
$\lambda$	Comprimento de onda	
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann	
$\epsilon$	Emissividade	
X	Ponto campo no interior do domínio	(maiúsculo = domínio) (minúsculo = contorno) (apóstrofe = ponto fonte) (sem apóstrofe = ponto campo)
x	Ponto campo no contorno	
X'	Ponto fonte no interior do domínio	
x'	Ponto fonte no contorno	
F	Quantidade total de divisões do tempo	
f	Passo atual	
$t_F$	Tempo final	
$t_f$	Tempo atual	
$\tau$	Variável de tempo relativo ao tempo final ( $t_F-t$ )	
$\Delta t$	Intervalo de tempo de um passo	
H	Matriz com as integrações dos núcleos referentes a solução fundamental $T^*$ interpoladas para os nós	
G	Matriz com as integrações dos núcleos referentes a solução fundamental $q^*$ interpoladas para os nós	
S	Vetor com o resultado das convoluções das matrizes H e G do passo 1 até o passo f-1	
r	Distância entre dois pontos, geralmente ponto fonte e ponto campo	
n	Vetor normal ao contorno	

## RESUMO

MILLAN, L. P. **Determinação da distribuição de temperatura transiente no tempo em elementos estruturais utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 114p Dissertação (Mestrado).

O Método dos Elementos de Contorno foi empregado no estudo do efeito transiente de temperatura em problemas de condução de calor para elementos planos. O objetivo do trabalho foi apresentar uma formulação usando elementos de contorno lineares contínuos ou descontínuos com parâmetros nodais fixados nas extremidades dos elementos. Os pontos de colocação foram situados nas extremidades dos elementos contínuos ou deslocados para o interior dos elementos no caso de elementos descontínuos. As integrações foram feitas com expressões analíticas quando o ponto de colocação pertencia ao elemento e com a quadratura de Gauss-Legendre para os outros casos. Um código computacional foi desenvolvido com a linguagem de programação C/C++ que tem uma descrição de forma simplificada apresentada no texto. Os resultados são comparados com soluções disponíveis na literatura para mostrar a precisão da formulação.

**Palavras Chave:** Método dos elementos de contorno; transferência de calor transiente; elementos descontínuos; formulação analítica do núcleo singular;

## ABSTRACT

MILLAN, L. P. **Determination of transient temperature distribution in structural elements using the Boundary Elements Method.** Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 114p Thesis (Master of Engineering).

The Boundary Elements Method was employed in the study of the transient effect of the temperature in heat conduction problems for plain elements. The purpose was to present a formulation using linear continuous or discontinuous boundary elements with nodal parameters fixed at the ends of elements. The collocation points were positioned at the ends of continuous elements or shifted to the interior of elements in case of discontinuous elements. The integrations were performed with analytical expressions for the case of collocation points belonging to the boundary element and the Gauss–Legendre quadrature for other cases. A computer code was developed with the C/C++ programming language which had a simplified explanation included in the text. The results were compared to available solutions in the literature to show the precision of the formulation.

**Key Words:** Boundary Element Method; transient heat transfer; discontinuous elements; analytical formulation of the singular kernel;

# 1. Introdução

A engenharia nas ultimas décadas chegou a tal grau de desenvolvimento que fatores de projeto antes tratados de forma secundária, hoje se tornaram barreiras a serem vencidas, como por exemplo, a temperatura. A indústria de processadores de circuito integrado, a extração de petróleo em grandes profundidades com plataformas offshore, o dimensionamento de edificações quanto à segurança contra incêndio, as indústrias aeronáutica, siderúrgica e de produção de energia nuclear são alguns dentre muitos outros exemplos. Em todos esses casos o computador se tornou indispensável como ferramenta de projeto, utilizando, para isso, softwares de cálculo baseados em métodos numéricos, foco desse trabalho.

Devido à complexidade de tais problemas é inviável desenvolver soluções analíticas para todos e, em alguns casos, é considerado até mesmo impossível. Dessa forma foram desenvolvidas técnicas de tratamento numérico (aproximadas) para a resolução desses problemas. Dentre as mais utilizadas tem-se: Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos Finitos (FEM em inglês) é a mais popular dos três e já possui uma grande gama de pacotes computacionais desenvolvidos. Ela se baseia na divisão do objeto (fluido ou sólido) em partes menores (elementos) e compatibilizando a característica física de interesse, no caso temperatura, com equações diferenciais caracterizando um problema de valor de contorno para o regime estacionário de temperatura ou um problema de valor inicial para o regime transiente de temperatura.

O Método das Diferenças Finitas (FDM em inglês) é muito utilizado na área de transferência de calor e massa devido às complexidades inerentes desses problemas, de forma que, por ser um método mais simples que os outros dois, tem seu uso incentivado para o desenvolvimento de protótipos e estudos iniciais.

O Método dos Elementos de Contorno (BEM em inglês), foco desse trabalho, é o método que trabalha com equações integrais obtidas da transformação das equações diferenciais parciais de domínio (interior) para o contorno (superfície). Tem como grande vantagem a facilidade de modelagem dos problemas, necessitando descrever apenas o contorno. Certas condições como geração de calor interna e variação de temperatura interna, quando o problema é de valor inicial, podem, sobre algumas circunstâncias, serem embutidas nas condições de contorno. Os valores nos pontos internos são calculados em pós-processamento, facilitando o estudo de várias situações sem que haja a necessidade do cálculo novamente de todo o problema. É o método ideal para resolução de problemas de espaço aberto devido à naturalidade inerente no tratamento do contorno de tais problemas.

Este trabalho está dividido em onze capítulos. A revisão bibliográfica encontra-se no capítulo dois.

Os fundamentos matemáticos para a leitura do trabalho foram revisados no capítulo três, assim como uma revisão sobre os fundamentos de transferência de calor (condução, convecção e radiação) no capítulo quatro. Caso o leitor esteja habituado com esses conceitos poderá seguir para os capítulos posteriores.

No capítulo cinco será feita a dedução das soluções fundamentais, base para o BEM, método que será então apresentado na íntegra no capítulo seis, tanto para o caso de problema em regime estacionário quanto para regime transiente.

Os capítulos sete e oito tratam de métodos de integração numérica e de funções não triviais utilizadas no método e a forma com que foram implementadas.

No capítulo nove é mostrado de forma simplificada o programa desenvolvido, tanto para o caso de problema em regime estacionário quanto para regime transiente e alguns estudos de caso simples, de forma a ilustrar os resultados obtidos.

Finalmente no capítulo dez serão discutidas questões sobre a eficiência e estabilidade dos algoritmos utilizados. A proposta de outros algoritmos sugeridos como próximo estudo e as conclusões desse trabalho estão no capítulo décimo primeiro.



## 2. Revisão Bibliográfica

A aplicação das equações integrais para formular os fundamentos de problemas de valor de contorno para problemas potenciais pode ser atribuída a 1903, quando Fredholm [2] demonstrou a existência da solução para essas equações usando o procedimento da discretização. Equações integrais vetoriais análogas a Fredholm, equações integrais da teoria potencial foram introduzidas por Kupradze [3] no contexto da teoria da elasticidade. Outras contribuições importantes foram apresentadas por Mikhlin [4] e Muskhelishvili [5], que discutiram a teoria formal e a aplicação das equações integrais com integrandos tanto escalares quanto vetoriais.

Devido à dificuldade de encontrar soluções analíticas, o uso de equações integrais foi, de por um longo período, confinada a investigações teóricas da existência e unicidade de soluções de problemas físicos matemáticos. O advento de computadores de alta velocidade fez possível a implementação de procedimentos de discretização e permitiu soluções numéricas serem executadas. As primeiras aplicações da formulação usando computadores digitais se dão com Massonnet [6], em 1956, para problemas da elasticidade e Smith e Pierce [7], em 1958, para problemas de fluxo.

Aplicações de procedimentos de discretização para resolver equações integrais de contorno em vários campos da engenharia foram apresentadas no começo dos anos sessenta, [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Essas aplicações iniciais adotaram procedimentos de discretizações simples (agora conhecidos como elementos constantes) e não foram dirigidos ao

desenvolvimento de técnicas numéricas paralelas ao FEM. Nesse sentido, um ponto de referência foi a publicação de artigo por Lachat e Watson [16], onde elementos isoparamétricos foram utilizados pela primeira vez no contexto do BEM, chamando atenção dos pesquisadores para o fato de que alguns algoritmos poderosos desenvolvidos para o FEM poderiam também ser diretamente aplicados para o BEM.

Segundo Wrobel [1], o primeiro livro sobre métodos para soluções numéricas das equações integrais para problema de valor de contorno na teoria potencial e elasticidade foi publicado por Jaswon e Symm em 1977 [17]. Esse livro foi seguido em 1978 pelo livro de Brebbia [18], também tratando apenas de problemas de potencial e elasticidade, onde os conceitos de pesos residuais para derivar as equações integrais de contorno foram usados pela primeira vez. Para arquivar, vários outros livros de BEM tem sido publicados, a maioria como livros introdutórios, concentrando em problemas de potencial e elasticidade (Beer e Watson [19], Hall [20], Paris e Cañas [21]). Livros recentes também tem se concentrado em aspectos computacionais do BEM, Beer [22] e Gao e Davies [23]. Os únicos livros de BEM que possuem uma cobertura abrangente de várias aplicações do método foram escritos por Banerjee e Butterfield [24], Brebbia et. al. [25], Banerjee [26], e em certas extensões, Kane [27] e Bonnet [28].

### 3. Fundamentos Matemáticos

#### 3.1 Notação Indicial

Notação Indicial é utilizada para simplificar e compactar longas expressões, sendo útil para o cálculo diferencial. A notação usa índices subscritos na forma (1, 2, 3) para representar direções Cartesianas (x,y,z) e indica somatória quando dois termos possuem mesmo índice, ou seja:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (3.1)$$

e

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (3.2)$$

Os índices são limitados a 3 para problemas tridimensionais e 2 para problemas bidimensionais.

As derivadas são na forma,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \quad (3.3)$$

A derivada de uma função vetorial, com componentes  $u_i$ , é representada como:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.4)$$

O produto de duas matrizes, com componentes  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ , é representado como

$$a_{ik}b_{kj} = c_{ij} \quad (3.5)$$

Outros símbolos que serão usados ao longo do texto são o tensor unitário alternante  $\epsilon_{ijk}$  e o delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ , definidos a seguir:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{para } \epsilon_{123}, \epsilon_{231}, \epsilon_{312} \\ -1 & \text{para } \epsilon_{132}, \epsilon_{213}, \epsilon_{321} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.2 Operadores Matemáticos

Gradiente  $\nabla$  de uma função escalar  $\phi$ :

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}e_i = \phi_{,i}e_i \quad (3.8)$$

Divergente  $\nabla \cdot$  de um vetor  $u$ :

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} \quad (3.9)$$

Rotacional  $\nabla \times$  de um vetor  $u$ :

$$\nabla \times u = u_{k,j} \epsilon_{ijk} \quad (3.10)$$

### 3.3 Operações Vetoriais

Produto interno de dois vetores ou produto escalar:

$$u_i v_i = \phi \quad (3.11)$$

Produto externo de dois vetores ou produto vetorial:

$$w_i = u_j v_k \epsilon_{ijk} \quad (3.12)$$

### 3.4 Sistema de Coordenadas

#### 3.4.1 Sistema de Coordenadas Curvilíneas Quaisquer

Qualquer conjunto de três vetores linearmente independentes em  $R^3$  forma uma base tal que qualquer vetor de  $R^3$  pode ser escrito como uma combinação linear destes três vetores, representados por  $[\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3]$ .

Impondo  $\hat{e}_i \bullet \hat{e}_j = 0 \forall i \neq j$  e considerando vetores normalizados, ou seja, sistema de coordenadas ortonormal. Pode-se escrever um deslocamento infinitesimal a partir do ponto  $P(q_1, q_2, q_3)$  até a coordenada  $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$  de comprimento  $ds$  e vetor  $d\vec{r}$  como expresso a seguir:

$$d\vec{r} = dq_1 \hat{e}_1 + dq_2 \hat{e}_2 + dq_3 \hat{e}_3$$

Introduzindo o elemento  $h_i$  por generalidade obtém-se:

$$dl_i = h_i dq_i$$

$$ds^2 = d\vec{r} * d\vec{r} = h_i^2 dq_i^2$$

Se variarmos  $q_i$  de  $\Delta q_i$ , obtemos um deslocamento segundo  $\hat{e}_i$  de  $\Delta l_i = h_i \Delta q_i$ , sendo que no limite tem-se

$$\frac{\partial q_i}{\partial l_i} = \frac{1}{h_i}$$

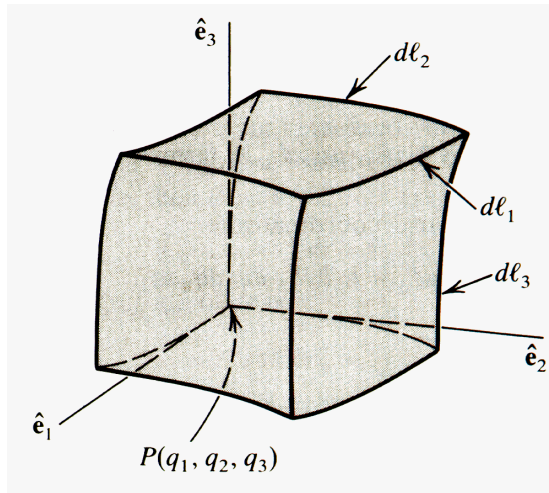


Figura 3.1 – Deslocamentos elementares segundo direções que são mutuamente perpendiculares entre si no ponto P

Calculando o gradiente de uma função diferenciável  $f(q_1, q_2, q_3)$ , lembrando que o gradiente segundo  $\hat{e}_i$  é a derivada direcional de  $f$  segundo o arco  $dl_i$  tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial l_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial l_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i$$

Para o cálculo da divergência, será considerado um “paralelepípedo” distorcido, de dimensões infinitesimais e com arestas orientadas segundo as direções dos versores do sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, como na figura a seguir:

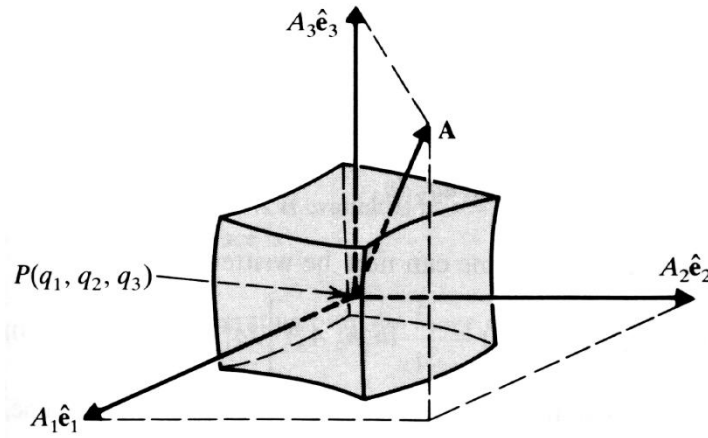


Figura 3.2 – Paralelepípedo distorcido de dimensões infinitesimais de um campo vetorial diferenciável A

O volume do paralelepípedo é  $V = h_1 \Delta q_1 h_2 \Delta q_2 h_3 \Delta q_3$  e a área da face perpendicular a  $\hat{e}_1$  é  $h_2 \Delta q_2 h_3 \Delta q_3$ .

Calculando o fluxo total, obtém-se a expressão geral para a divergência do campo A como:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

e para o rotacional:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{bmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{bmatrix}$$

### 3.4.2 Coordenadas Cilíndricas

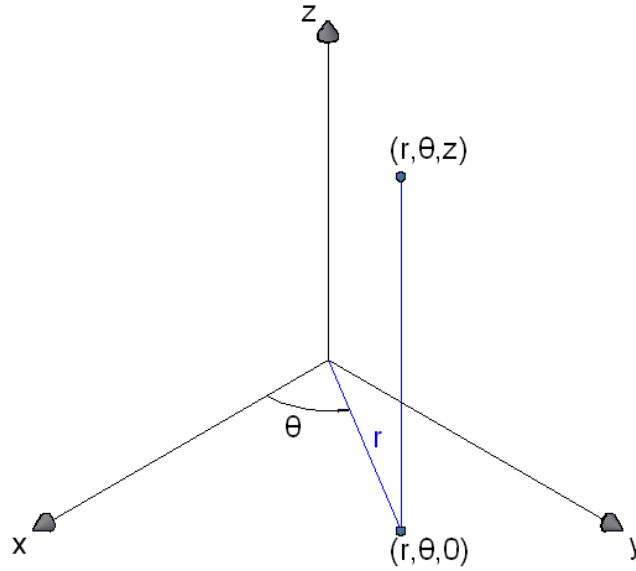


Figura 3.3 – Sistema de Coordenadas Cilíndricas

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} e_z$$

$$\nabla \cdot u = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times u = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) e_z + \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) e_z$$

(3.13)



### 3.4.3 Coordenadas Esféricas

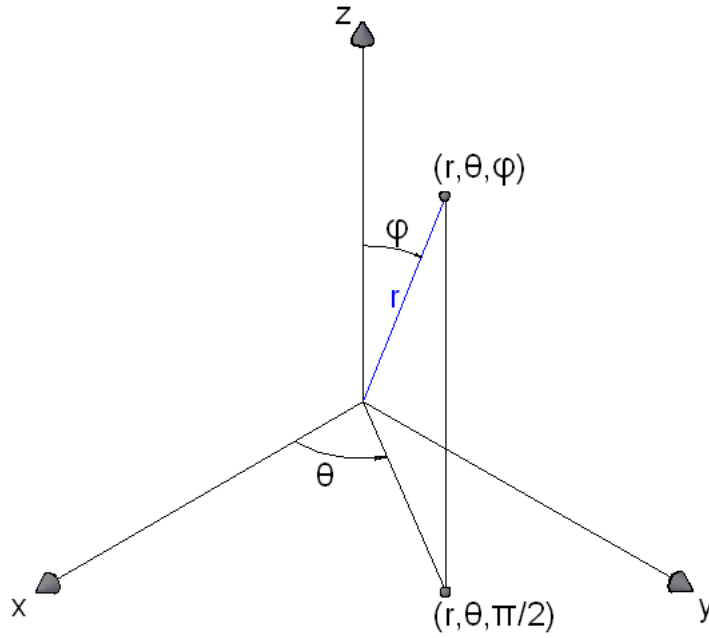


Figura 3.4 – Sistema de Coordenadas Esféricas

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} e_\varphi$$

$$\nabla \cdot u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial(\operatorname{sen}(\theta) u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times u = & \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \left[ \frac{\partial(\operatorname{sen}(\theta) u_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] e_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r} \right] e_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] e_\varphi \end{aligned}$$

(3.14)

### 3.5 Teoremas e Identidades

#### Teorema de Gauss (Teorema da Divergência)

Seja  $V$  uma região no espaço limitada pela superfície fechada  $S$  e  $F$  um vetor campo nessa região.

O Teorema da Divergência estabelece que o total de fluxo do vetor campo  $F$  através da superfície fechada  $S$  deve ser igual a integral de volume do divergente desse vetor:

$$\int_{\Gamma} F_i n_i d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.15)$$

onde  $n_i$  são componentes do vetor unitário normal à superfície  $S$ , com sentido para fora do domínio  $V$ .

#### 3.5.1 Primeira Identidade de Green

$$\int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} n_i d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) d\Omega$$

Derivando por partes:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \phi \nabla^2 \psi$$

Substituindo:

$$\int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi d\Omega \quad (3.16)$$

### 3.5.2 Segunda Identidade de Green

Intercambiando  $\phi$  por  $\psi$  obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \phi d\Omega$$

Subtraindo de (3.16)

$$\int_{\Gamma} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi d\Omega$$

(3.17)

### 3.6 Delta de Dirac

O Delta de Dirac ou, como costuma ser impropriamente chamada, a função Delta de Dirac, tem como definição ter valor nulo em todos os pontos exceto um onde tende ao infinito, trata-se na verdade de uma distribuição.

Para o caso do ponto único ser  $x=0$  então:

$$\Delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x) dx = 1 \quad (3.19)$$

A distribuição Delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x - x') f(x) dx = f(x') \quad (3.20)$$

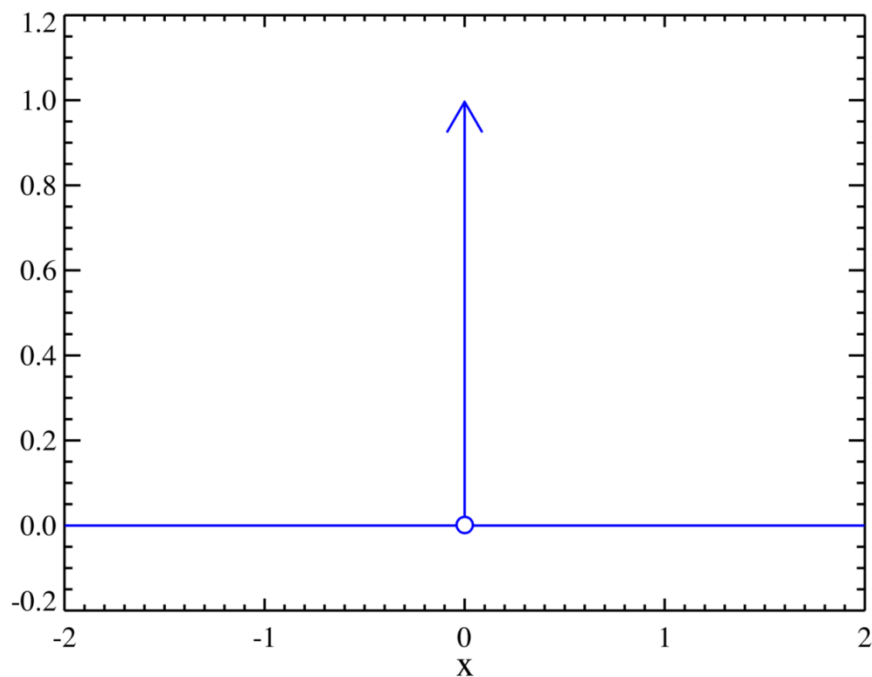


Figura 3.5 – A distribuição Delta de Dirac

## 4. Fundamentos de Transferência de Calor

### 4.1 Condução

#### 4.1.1 Lei de condução de Fourier

Feita através de observações, foi estabelecido que o fluxo de energia que atravessa um meio é proporcional à área perpendicular ao fluxo, à diferença de temperatura e ao inverso da distância, De forma simbólica:

$$q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (4.1)$$

Convertendo em uma igualdade pela introdução de um coeficiente que representa uma medida do comportamento do material, pode-se escrever:

$$q_x = KA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (4.2)$$

Onde K é a condutividade térmica (W/m K).

Avaliando essa expressão no limite conforme  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtemos para a taxa de calor

$$q_x = -KA \frac{dT}{dx} \quad (4.3)$$

ou para fluxo de calor

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -KA \frac{dT}{dx}$$

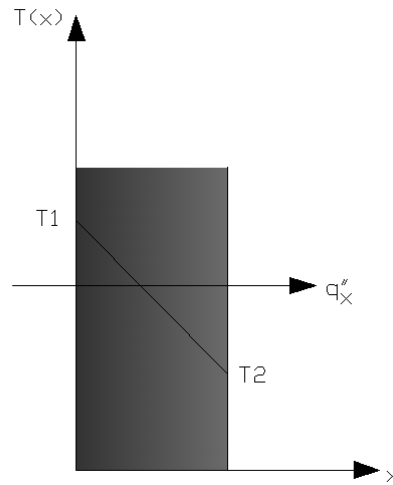


Figura 4.1 - Relação entre o sistema de coordenadas, a direção do fluxo de calor e o gradiente de temperatura unidimensional

Sabendo que o fluxo de calor é uma grandeza vetorial podemos escrever uma forma mais geral da equação da taxa de condução (lei de Fourier) como a seguir:

$$\mathbf{q}'' = -K\nabla T = -K\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (4.4)$$

Onde  $T(x, y, z)$  é o campo de temperatura escalar.

Está implícito na Eq. 4.4 que o vetor fluxo de calor encontra-se em uma direção perpendicular às superfícies isotérmicas. Uma forma alternativa da lei de Fourier é conseqüentemente:

$$q''_n = -K\frac{\partial T}{\partial n} \quad (4.5)$$

Nesse trabalho será sempre considerado meio isotrópico, ou seja, o valor da condutividade térmica independe da direção dos eixos coordenados.

#### 4.1.2 A Equação de Difusão de Calor

Considere um meio homogêneo dentro do qual não existe movimento global (advecção) e a distribuição de temperatura  $T(x, y, z)$  é expressa em coordenadas cartesianas. Aplicando a 1.ª Lei da Termodinâmica (Lei de Conservação de Energia) definimos um pequeno volume de controle infinitesimal conforme a figura 4.2.

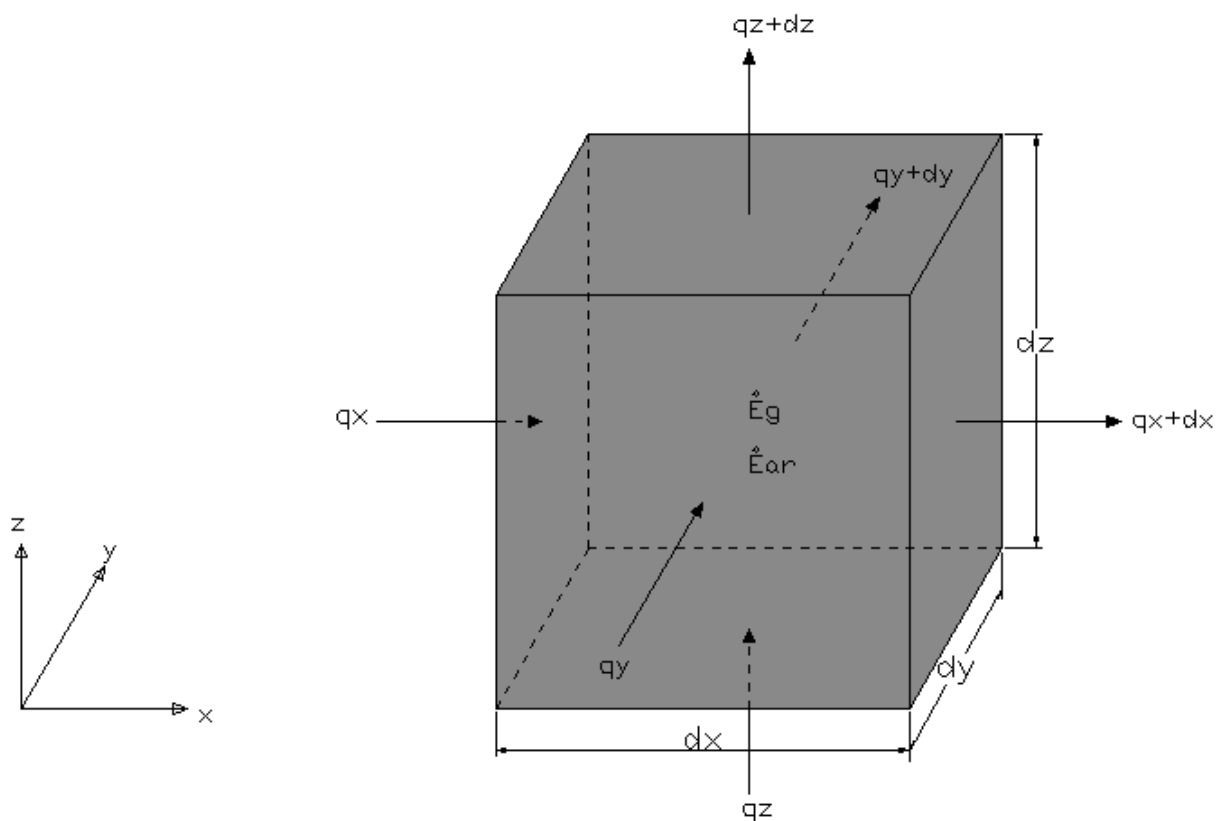


Figura 4.2 – Volume de controle diferencial em coordenadas cartesianas

As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem ser então expressas como uma expansão da série de Taylor, onde, desprezando os termos de ordens superiores,

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (4.6a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (4.6b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (4.6c)$$

No interior do meio pode haver também um termo para representar uma fonte de energia, que está associada à taxa de geração de energia térmica. Esse termo é representado por

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (4.7)$$

em que  $\dot{q}$  é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio (W/m<sup>3</sup>). Além disso, podem ocorrer variações na quantidade de energia térmica interna armazenada pelo material no volume de controle. Se o material não sofre mudança de fase, não há efeito da energia latente, e a energia armazenada pode ser dada por

$$\dot{E}_{ar} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (4.8)$$

Com base nas taxas de transferência de energia, a forma geral da exigência de conservação de energia é

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_{ar} \quad (4.9)$$



Logo, reconhecendo que as taxas de condução que entram,  $\dot{E}_e$  e a que sai  $\dot{E}_s$  e substituindo nas eqs. 4.7 e 4.8 obtém-se

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}dxdydz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (4.10)$$

Substituindo as eqs. 4.6, segue que

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (4.11)$$

As taxas de calor por condução podem ser avaliadas a partir da lei de Fourier,

$$q_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.12a)$$

$$q_y = -kdx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.12b)$$

$$q_z = -kdx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.12c)$$

em que cada componente do fluxo de calor da eq. 4.4 foi multiplicada pela área da superfície de controle apropriada, a fim de obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as Eqs. 4.12 na Eq. 4.11 e dividindo todos os termos pelas dimensões do volume de controle (dx.dy.dz), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.13)$$

A Eq. 4.13 é a forma geral da equação da difusão de calor em coordenadas cartesianas.

Sob condições de regime estacionário, não há variação na quantidade da energia armazenada; então a Eq. 4.13 se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (4.14)$$

A eq. 4.14 é conhecida como equação de Poisson em três dimensões.

Quando o meio for isotrópico e não houver variação de energia então a Eq. 4.14 pode ser escrita na forma

$$\nabla^2 T = 0 \quad (4.15)$$

A eq. 4.15 é conhecida com equação de Laplace.

## 4.2 Convecção

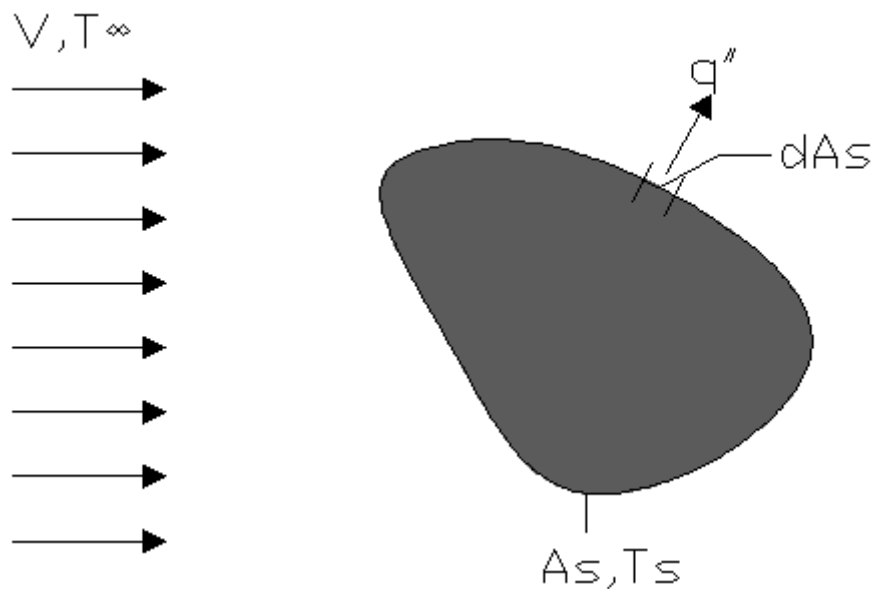


Figura 4.3 – Transferência de calor por convecção em superfície de forma arbitrária

Considere a condição de escoamento da Figura 4.3. Um fluido de velocidade  $V$  e temperatura  $T_{\infty}$  escoa sobre uma superfície de forma arbitrária e de área  $A_s$ . Presumindo que a superfície encontra-se a uma temperatura uniforme,  $T_s$ , e se  $T_s \neq T_{\infty}$ , sabemos que a transferência de calor por convecção irá ocorrer. O fluxo de calor local  $q''$  pode ser representado como

$$q'' = h(T_s - T_{\infty}) \quad (4.16)$$

onde  $h$  é o coeficiente local de convecção. Devido às condições de escoamento variarem de ponto a ponto sobre a superfície,  $q''$  e  $h$  também variam ao longo da superfície. A taxa de transferência de calor total  $q$  pode ser obtida pela integração do fluxo local sobre toda superfície. Ou seja,

$$q = \int_{A_s} q'' dA_s \quad (4.17)$$

ou, da Eq. 4.16,

$$q = (T_s - T_{\infty}) \int_{A_s} h dA_s \quad (4.18)$$

### 4.3 Radiação

A Lei de Stefan-Boltzmann que determina o poder emissivo total de um corpo negro,  $E_b$ , pode ser representada como

$$E_b = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1]} d\lambda$$

(4.19)

Onde  $\lambda$  é o comprimento de onda, C1 e C2 são constantes de radiação.

Essa equação é resultado da distribuição de Planck para um emissor difuso e não será abordada por estar além do escopo desse texto.

Efetuada a integração, pode ser mostrado que

$$E_b = \sigma T^4 \quad (4.20)$$

onde a constante de Stefan-Boltzmann, que depende de C1 e C2, possui valor numérico

$$\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

A troca de calor por radiação de um material com emissividade  $\epsilon$  (porcentagem relativa à troca de calor do corpo negro) e o meio a temperatura  $T_r$  é expressa por

$$q = -\sigma\epsilon(T^4 - T_r^4) \quad (4.21)$$

## 5. Estado Auxiliar

### 5.1 Potencial gerado por um ponto fonte

#### 5.1.1 Equilíbrio

Na transferência de calor por condução, a resposta térmica de um meio infinito condutivo a uma fonte pontual de geração de energia interna é chamada de solução fundamental. Para problemas potenciais definidos sobre um meio homogêneo e isotrópico, a solução fundamental tridimensional deve ter simetria esférica, pode ser definida como função  $\phi^*$  pelo menos duas vezes diferenciável em relação às coordenadas do ponto campo  $X$ , que satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos exceto no ponto  $X'$ , de aplicação da fonte (chamado de ponto fonte), i.e.

$$\nabla^2 T^* = \frac{-\Delta(X', X)}{K} \quad (5.1)$$

A solução para a equação acima pode ser achada escrevendo o Laplaciano em coordenadas esféricas e considerando que todas as soluções são as mesmas para todas as direções.

$$\nabla^2 T^* = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT^*}{dr} \right) = 0 \quad (5.2)$$

A solução para essa equação diferencial ordinária em termos da distância  $r$  entre o ponto fonte e o ponto campo válida para  $X' \neq X$  é

$$T^* = c_0 + \frac{c_1}{r} \quad (5.3)$$

onde  $c_0$  é uma constante arbitrária correspondente ao nível de referência adotado para medir o potencial, e não tem influência no cálculo.

A constante  $c_1$  pode ser determinada pelo conceito de conservação de energia. Para isso, considere a superfície de controle esférica de raio  $\epsilon$  centrada no ponto fonte  $X'$  conforme figura 5.1. Todos os pontos campo nessa superfície estão na mesma distância  $\epsilon$  do ponto fonte, e a direção normal externa coincide com a direção do raio, i.e.

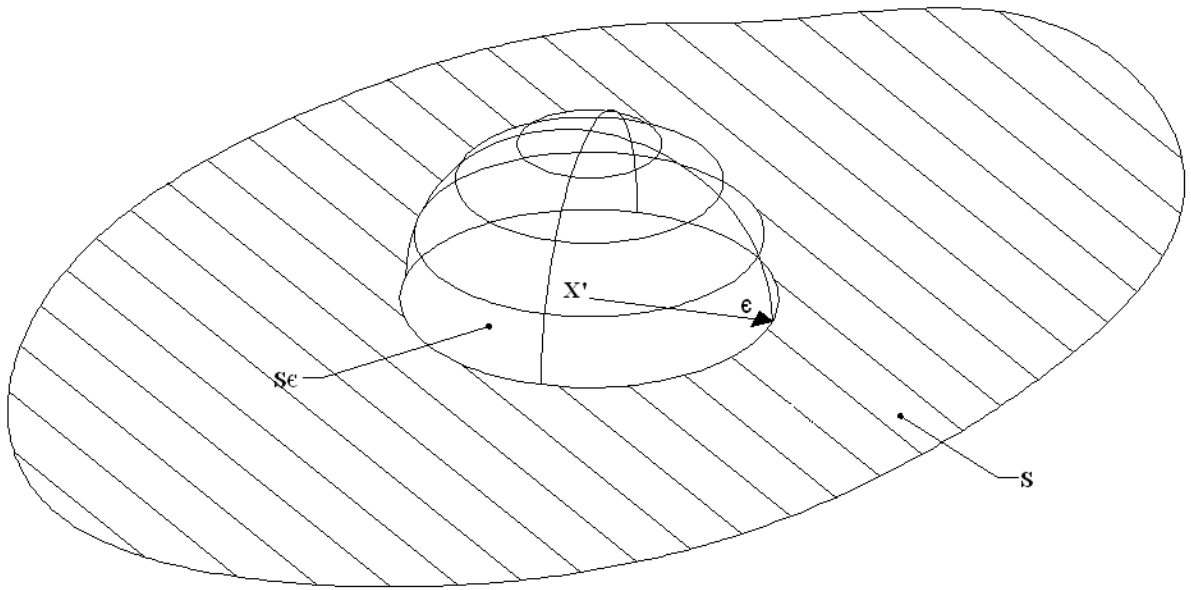


Figura 5.1 – Hemisfério centrado no ponto  $X'$

Pelo princípio de conservação de energia, o fluxo total que atravessa a superfície da esfera deve ser igual ao fluxo unitário do ponto  $X'$ , i.e.

$$\int_{S_\epsilon} \frac{\partial T^*}{\partial n} dS_\epsilon = 1 \quad (5.4)$$

Cabe lembrar a propriedade da eq. 3.19 do Delta de Dirac sobre a qual se deduz tal fluxo unitário, agora considerando a integral sobre a superfície do hemisfério.

Agora substituindo a eq. 5.3 na eq. 5.4, e substituindo a derivada normal pela derivada na direção do raio, obtém-se

$$c_1 \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S_\epsilon} dS_\epsilon = 1 \quad (5.5)$$

Como a área da superfície esférica é  $4\pi r^2$ , obtém-se a constante  $c_1$  na forma

$$c_1 = \frac{1}{4\pi} \quad (5.6)$$

Substituindo dentro da expressão 5.3, e assumindo  $c_0=0$ , a expressão para solução fundamental fica então

$$T^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Transiente

A solução fundamental da equação de difusão 4.13 é uma função de Green dimensional-independente, descrevendo o campo de temperatura gerado por uma fonte de calor unitária aplicada no ponto  $X'$  no tempo  $t_0$  [31,32], i.e.

$$T^*(X', x, t_F, t) = \frac{1}{(4\pi k\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) H(\tau) \quad (5.8)$$

Sendo o tempo do problema limitado pela função de Heaviside dividido em F espaços de tempo de mesma quantidade, assim:

$t_F$	é o tempo final
$\tau = t_F - t$	é o tempo restante contado a partir do tempo atual
$r =  X' - x $	é a distância do ponto fonte no domínio ao ponto campo no contorno
$d$	é a dimensão do problema

## 5.2 Solução Fundamental para o Caso Bi-Dimensional

### 5.2.1 Equilíbrio

A solução fundamental para o caso potencial bi-dimensional corresponde ao potencial induzido por uma linha de pontos fontes estendendo-se ao longo do eixo  $z$ . Isso é determinado começando de um seguimento finito  $-l \leq z \leq l$  conforme figura 5.2, e tomando o limite com  $l \rightarrow \infty$ .

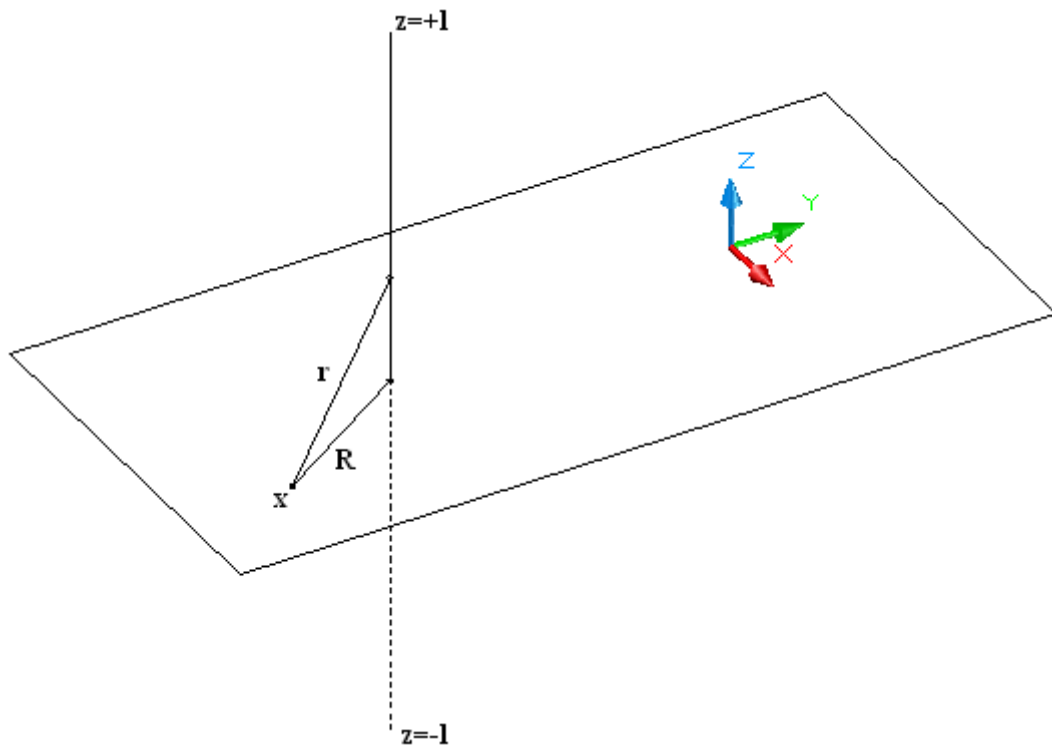


Figura 5.2 – Linha de Pontos Fontes no eixo  $Z$

Os potenciais para os pontos no plano  $x$ - $y$  podem ser escritos, considerando que as fontes têm densidade unitária, como a seguir



$$T^*(X', x) = \int_{-l}^l \frac{1}{4\pi r} dz = \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} + C_0(l) \quad (5.9)$$

na qual  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância (no plano x-y) de um ponto fixo a linha fonte, e  $C_0(l)$  é uma constante arbitrária para um dado  $l$ , relativa a escolha do nível de referência para o potencial.

A integral na equação (5.9) tem o seguinte resultado

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \ln \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) + C_1$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração arbitrária que será incorporada em  $C_0(l)$ .

Como a função a ser integrada é par, a integral de (5.9) pode ser computada como duas vezes a integral de 0 a  $l$ , dando

$$T^*(X', x) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \left( l + \sqrt{R^2 + l^2} \right) - \ln (R) \right) + C_0(l)$$

Quando  $l \rightarrow \infty$ , o argumento do logaritmo envolvendo  $l$  comporta-se assintoticamente como  $2l$ ; assim, a constante  $C_0(l)$  é escolhida como

$$C_0(l) = -\frac{1}{2\pi} \ln (2l)$$

obtendo-se

$$T^*(X', x) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{l + \sqrt{R^2 + l^2}}{2l} \right) - \ln (R) \right]$$

Tomando o limite quando  $l \rightarrow \infty$ , tem-se para potencial bi-dimensional

$$T_{2D}^*(X', x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(R) \quad (5.10)$$

A derivada normal para potencial bi-dimensional tem a forma

$$\frac{\partial T_{2D}^*(X', x)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \ln(R) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{(X'_j - x_j)}{R^2} n_j(x) \quad (5.11)$$

### 5.2.2 Transiente

A solução fundamental para temperatura e fluxo para problemas bi-dimensionais é dada por:

$$T^* = \frac{1}{4\pi k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \quad (5.12)$$

$$q^* = \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{8\pi(k\tau)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \quad (5.13)$$

## 6. Método dos Elementos de Contorno

### 6.1 Formulação do MEC

#### 6.1.1 Equilíbrio

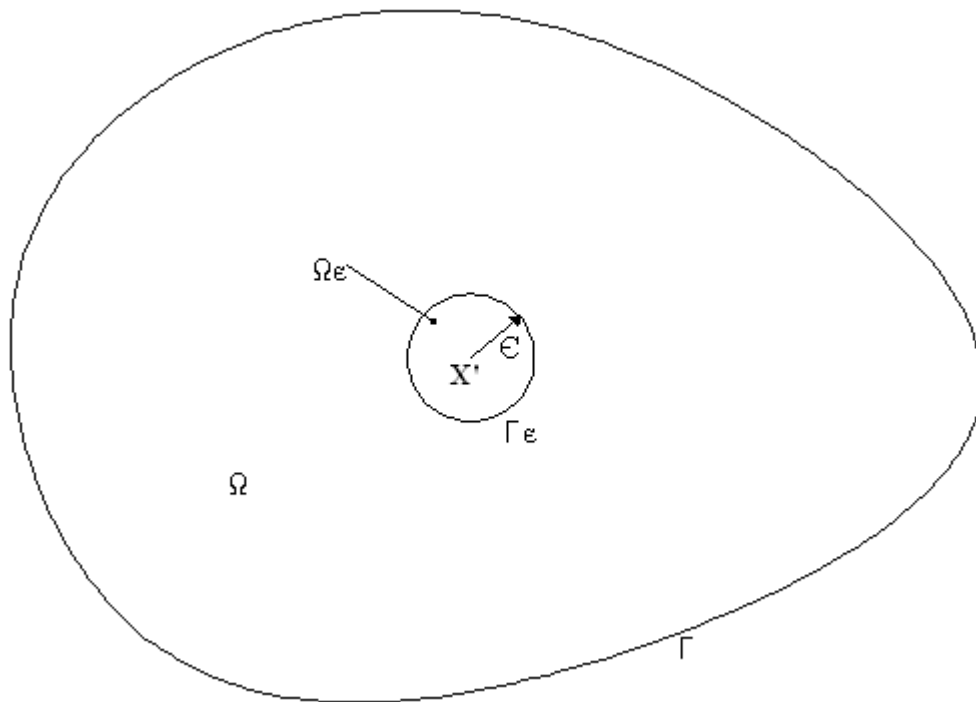


Figura 6.1 – Círculo de raio  $\epsilon$  centrado no ponto fonte  $X'$

Considerando o domínio  $\Omega$  limitado pelo contorno bi-dimensional fechado  $\Gamma$ , a aplicação da segunda identidade de Green, eq. 3.17, válida para duas funções regulares quaisquer, fica condicionada a exclusão do ponto fonte  $X'$  onde  $T^*$  é singular. Isso é feito removendo-se um círculo de raio  $\epsilon$  centrado no ponto  $X'$  conforme a figura 6.1.

Agora aplicando a segunda identidade de Green na nova região  $\Omega - \Omega_\epsilon$ , contornada externamente por  $\Gamma$  e internamente por  $\Gamma_\epsilon$  ao potencial  $T$  e a solução fundamental  $T^*$  obtém-se

$$\int_{\Omega - \Omega_\epsilon} (T \nabla^2 T^* - T^* \nabla^2 T) d\Omega = \int_{\Gamma} (T q^* - T^* q) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} (T q^* - T^* q) d\Gamma_\epsilon \quad (6.1)$$

Primeiro analise-se o potencial na integral sobre  $\Gamma_\epsilon$ . Inicialmente, o valor de  $T$  no ponto fonte,  $T(X')$ , é subtraído e adicionado a  $T(x)$  ficando assim

$$\int_{\Gamma_\epsilon} T(x) q^*(X', x) d\Gamma_\epsilon = \int_{\Gamma_\epsilon} [T(x) - T(X')] q^*(X', x) d\Gamma_\epsilon + T(X') \int_{\Gamma_\epsilon} q^*(X', x) d\Gamma_\epsilon \quad (6.2)$$

O procedimento acima pode ser interpretado como expansão de Taylor de primeira ordem da função  $T(x)$  em termos de  $T(X')$ .

Concentrando agora na segunda integral do lado direito da equação acima. A derivada normal de  $T^*$  dada pela eq. 5.11

$$q^*(X', x) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{(X'_j - x_j)}{R^2} n_j(x) \quad (6.3)$$

Sendo o vetor  $r$  apontando do ponto fonte para o ponto campo e o vetor normal  $n$  apontando para fora do domínio (i.e. para fora do círculo), o termo  $\partial r / \partial n$  é igual a -1, resultando

$$q^* = \frac{1}{2\pi r}$$

Escrevendo a integral em coordenadas polares, que no caso

$$d\Gamma_\epsilon = \epsilon d\theta$$

com o limite produz o resultado

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} q^*(X', x) d\Gamma_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\theta = 1 \quad (6.4)$$

Usando o mesmo procedimento acima para a primeira integral do lado direito da eq. 6.2, e assumindo a função  $T$  contínua em  $X'$ , obtém-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [T(x) - T(X')] q^*(X', x) d\Gamma_\epsilon = 0$$

assim com

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} T(x) q^*(X', x) d\Gamma_\epsilon = T(X') \quad (6.5)$$

O mesmo procedimento pode ser novamente aplicado para o limite da segunda integral em  $\Gamma_\epsilon$  na eq. 6.1

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} T^*(X', x) q(x) d\Gamma_\epsilon = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon) q(x) \epsilon d\theta = 0 \quad (6.6)$$

Tomando as eq. 6.5 e 6.6 em consideração, o limite da integral sobre  $\Gamma_\epsilon$  na eq. 6.1 fica na forma

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [T(x) q^*(X', x) - T^*(X', x) q(x)] d\Gamma_\epsilon = T(X')$$

e a seguinte equação é obtida da eq. 6.1

$$T(X') = \int_{\Gamma} [T^*(X', x) q(x) - T(x) q^*(X', x)] d\Gamma \quad (6.7)$$

Essa é conhecida como a terceira identidade de Green, aplicada para o problema potencial.

Para obter uma equação integral de contorno relativo somente aos valores de contorno, o limite é tomado quando o ponto  $X'$  tende ao ponto  $x'$  no contorno  $\Gamma$ . Novamente, é necessário excluir o ponto  $x'$  antes de tomar o limite, sendo  $x'$  pertencente a uma parte suave (a tangente variando continuamente) do contorno, tomando um semicírculo agora no contorno com centro em  $x'$  e aplicando o mesmo procedimento anterior, sendo a única diferença a parte de cima do integrando das eq. 6.4 e 6.6 como  $\pi$  ao invés de  $2\pi$ . Tomando o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , para um ponto  $x'$  no contorno,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [T(x)q^*(x', x) - T^*(x', x)q(x)]d\Gamma_\epsilon = \frac{1}{2}T(x')$$

e a seguinte integral pode ser obtida:

$$\frac{1}{2}T(X') = \int_{\Gamma} [T(x)q^*(x', x) - T^*(x', x)q(x)]d\Gamma \quad (6.8)$$

### 6.1.2 Transiente

Reescrevendo a equação de difusão na seguinte forma:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} + F = 0 \quad (6.9)$$

A solução da equação não homogênea na forma  $\nabla^2 T + b = 0$  admitindo-se dois estados de tempo  $t_1 = \xi$  e  $t_2 = t - \xi$  com  $0 \leq \xi \leq t$  é da forma

$$\int_{\Gamma} (q^1 T^2 - q^2 T^1) d\Gamma = \int_{\Omega} \left[ \left( F^2 - \frac{1}{k} \frac{\partial T^2}{\partial t} \right) T^1 - \left( F^1 - \frac{1}{k} \frac{\partial T^1}{\partial t} \right) T^2 \right] d\Omega \quad (6.10)$$

colocando as variáveis de tempo,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (q(\xi)T(t-\xi) - q(t-\xi)T(t))d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \left[ \left( F(t-\xi) - \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}(t-\xi) \right) T(\xi) - \left( F(\xi) - \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}(\xi) \right) T(t-\xi) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Fazendo a integração no tempo e dado a forma da equação de reciprocidade abaixo

$$(a \otimes b)(t) = \int_0^t a(t-\xi)b(\xi)d\xi = \int_0^t a(\xi)b(t-\xi)d\xi$$

Verifica-se assim reciprocidade.

Retornando a equação integral do problema

$$\int_{\Gamma} (q^1 T^2 - q^2 T^1) d\Gamma = \int_{\Omega} (b^2 T^1 - b^1 T^2) d\Omega \tag{6.12}$$

Fazendo a equação de difusão na forma:

$$k \nabla^2 G - \frac{\partial G}{\partial t} + \Delta(X' - x) \Delta(t - t_f) = 0 \tag{6.13}$$

Reescrevendo a eq. 3.17 em dois estados obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial U^1}{\partial n} U^2 - \frac{\partial U^2}{\partial n} U^1 \right) d\Gamma = \int_{\Omega} (b^2 U^1 - b^1 U^2) d\Omega$$

Levando em conta  $\nabla^2 U + b = 0$  e  $\frac{\partial U}{\partial n} = q$ , sendo G e U funções vetoriais

tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial n}(t) T(t_F - t) - \frac{\partial T}{\partial n}(t_F - t) T^*(t) \right) d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \left[ -\frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}(t_F - t) T^*(t) - \frac{1}{k} \left( \Delta(X' - x) \Delta(t - t_F) - \frac{\partial T^*}{\partial t} \right) T(t_F - t) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Integrando no tempo

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_F} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial n}(t) T(t_F - t) - \frac{\partial T}{\partial n}(t_F - t) T^*(t) \right) d\Gamma dt \\
&= \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{k} \frac{\partial T^*}{\partial t}(t) T(t_F - t) - \frac{1}{k} T^*(t) \frac{\partial T}{\partial t}(t_F - t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k} \Delta(X' - x) \Delta(t - t_F) T(t_F - t) \right] d\Omega dt
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Contraindo o segundo lado da equação e usando a propriedade do delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
& k \int_0^{t_F} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial n}(t_F - t) T(t) - \frac{\partial T}{\partial n}(t) T^*(t_F - t) \right) d\Gamma dt = \\
& \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (T^*(t) T(t_F - t)) d\Omega dt - T(X', t_F) = \int_{\Omega} [T^*(t_F - t) T(t)]_0^{t_F} d\Omega - T(X', t_F)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

para  $t = 0$

$$T^* = \frac{1}{4\pi k t_F} \exp\left(\frac{r^2}{4k t_F}\right)$$

para  $\lim_{t \rightarrow t_F}$

$$T^* = 0$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
& c(x') T(x', t_F) + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*}{\partial n}(x', x, t_F, t_0) T(x, t) d\Gamma \\
&= k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n}(x, t) T^*(x', x, t_F, t) d\Gamma dt + \int_{\Omega} T_0(x) T^*(x', x, t_F, t_0) d\Omega
\end{aligned} \tag{6.17}$$

onde  $c(x')$  vale  $\frac{1}{2}$  para contorno suave conforme tratamento dado na seção anterior (equilíbrio)

para excluir o ponto fonte do contorno.



## 6.2 Elemento de Contorno

### 6.2.1 Equilíbrio

As eq. 6.8 e 6.17, bases do método, possuem integrais de contorno e assim como foi dito anteriormente sua solução analítica só é viável para problemas muito simples, assim a forma de atacar o problema é fazer uma divisão do contorno do sólido em elementos menores transformando assim essas integrais em um somatório na forma

$$\frac{1}{2}T(x') = \sum_{j=1}^{Ne} q_j \int_{\Gamma_j} T^*(x', x) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{Ne} T_j \int_{\Gamma_j} q^*(x', x) d\Gamma_j \quad (6.18)$$

Agora no interior das integrais de contorno estão apenas as soluções fundamentais que serão resolvidas para cada ponto fonte  $x'$ , chamadas também de núcleo da integração, essa integração é feita sobre cada elemento do contorno de forma a gerar um sistema de equações como será tratado na seção 6.5.

Para esse trabalho serão considerados elementos com geometria linear (segmentos de reta) com função de interpolação linear (tratado a seguir), pois são elementos que discretizam de forma direta sólidos com geometria regular (sem curvas), são simples de programar computacionalmente separando assim dificuldades de implementação do método e a integração dos núcleos, tarefa não trivial tratada nas seções 6.3 e 6.4, além de possibilitar a integração do núcleo singular de forma analítica, seção 6.4.

A função de forma determina o modo com que os valores internos ao elemento são interpolados aos nós do próprio elemento, ou seja, ela transforma variáveis contínuas em variáveis discretas, simplificando sua implementação computacional.

Utilizando coordenadas intrínsecas, ou seja, mapeando uma variável que percorreria o elemento em sua extensão de 0 até L seu comprimento em uma variável  $\xi$  que percorre o elemento linear de -1 (nó esquerdo do elemento) até 1 (nó direito do elemento) temos as seguintes funções de forma conforme figura 6.2,

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

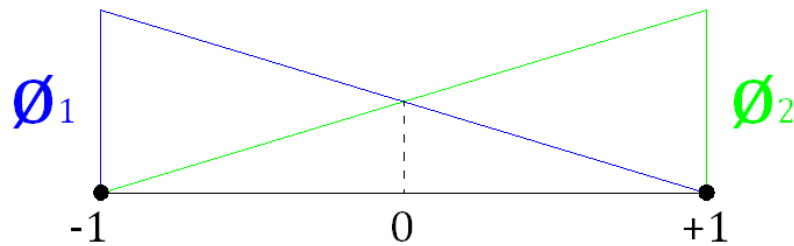


Figura 6.2 – Funções de forma do elemento linear

Substituindo as funções de forma na eq. 6.18 obtém-se

$$\frac{1}{2}T(x') = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} T^*[\phi_1(\xi)q_1 + \phi_2(\xi)q_2]d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} q^*[\phi_1(\xi)T_1 + \phi_2(\xi)T_2]d\Gamma_j \quad (6.19)$$

### 6.2.2 Transiente

No regime transiente há duas integrações, uma no espaço e outra no tempo. Por questões de simplicidade a discretização no espaço será tomada como na seção anterior para problemas no equilíbrio, elemento linear com função de forma linear, porém, no caso do efeito transiente, a discretização no tempo será em partes constantes. Também como foi discutido anteriormente essa discretização é a mais simples possível, separando dificuldades inerentes do método da dificuldade de integração dos núcleos. Cabe salientar que a formulação pode ser estendida para uma discretização linear do tempo sem grande esforço adotando a variação de temperatura e fluxo na forma:

$$T = \frac{(t_f - t)T_{j,f-1} + (t - t_{f-1})T_{j,f}}{\Delta t_f}$$

$$q = \frac{(t_f - t)q_{j,f-1} + (t - t_{f-1})q_{j,f}}{\Delta t_f}$$

Correspondentes expressões para o elemento linear no tempo podem ser encontradas em Pasquetti et al. [33].

Retornando agora ao elemento constante no tempo, dividindo o contorno  $\Gamma$  em  $N_e$  elementos e o tempo total  $t_f - t_0$  em  $F$  espaços de tempo, invertendo a ordem de integração e considerando a integral de domínio nula (considerações adicionais para integral de domínio não nula será abordada na seção 6.6.3.2) a eq. 6.17 fica na forma

$$c_i T_{i,F} + k \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T q^* dt d\Gamma_j = k \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} q T^* dt d\Gamma_j \quad (6.20)$$

## 6.3 Integração Numérica do Núcleo não Singular

### 6.3.1 Equilíbrio

Substituindo as soluções fundamentais das eqs. 5.10 e 5.11 nas integrais da eq. 6.19 chega-se a expressão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T(x') = & \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) [\phi_1(\xi)q_1 + \phi_2(\xi)q_2] d\Gamma_j \\ & - \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \frac{(x'_j - x_j)}{r^2} n_j(x) [\phi_1(\xi)T_1 + \phi_2(\xi)T_2] d\Gamma_j \end{aligned} \quad (6.21)$$

sendo agora  $r$  a distância do ponto fonte  $x'$  ao ponto campo  $x$ , ambos no contorno. Cabe notar que quando  $x'$  aproxima-se de  $x$  a primeira integral possui uma singularidade na forma  $\ln(r)$  e a segunda integral uma singularidade na forma  $1/r$ , ambas quando  $r$  se aproxima de zero. Assim quando o ponto fonte  $x'$  está no elemento essas integrais devem ter tratamento especial, conforme será descrito nas seções seguintes. Caso contrário, as integrais são não singulares e serão feitas integrações numéricas.

As integrações numéricas serão feitas utilizando pontos de Gauss, técnica a ser descrita na seção 7, que consiste em fazer um somatório dos integrandos resolvidos em coordenadas distintas do elemento, ponderados pelos respectivos pesos conforme mostrado abaixo:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NG} F(\xi_i) w_i$$

sendo  $w_i$  os pesos de cada ponto  $i$ , que variam de 1 até NG ou Número de pontos de Gauss.

Cabe lembrar também que a transformação de coordenadas globais para coordenadas intrínsecas deve ser acompanhada do Jacobiano da transformação que, para elementos lineares, é  $L/2$ , sendo  $L$  o comprimento do elemento.

### 6.3.2 Transiente

Da mesma forma com que foi tratado o regime em equilíbrio, será tratado o regime em transiente, porem sendo necessário realizar a integração no tempo antes da aplicação do método de integração numérica para a integração no espaço, assim os integrados ficam na forma

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{2\pi k r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4k\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt =$$

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{2\pi k r^2} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)]$$
(6.22)

onde

$$a_f = \frac{r^2}{4k(t_f - t_f)}$$

Como estratégia de integração para a temperatura fundamental  $T^*$ , será feita uma mudança de variáveis, chamando

$$z = \frac{r^2}{4k\tau}$$

ficando assim a integral na forma

$$\begin{aligned}\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt = \frac{1}{4\pi k} \int_{a_{f-1}}^{a_f} \frac{\exp(-z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{4\pi k} [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)]\end{aligned}\tag{6.23}$$

onde  $E_1$  é a função exponencial integral, conforme será descrita no capítulo 8.

## 6.4 Integração Analítica do Núcleo Singular

Existem várias formas de tratar as singularidades no MEC. Nesse trabalho será utilizado o tratamento analítico das integrais, note que quando existe um salto na variação da tangente do contorno, ou para elementos lineares um canto, os fluxos à esquerda e à direita do ponto de encontro de dois elementos, podem ter valores diferentes, já que o fluxo é analisado a partir da normal ao elemento, assim para construir o sistema compatível de equações, seção 6.5, é necessário tomar alguma das seguintes providências:

1 – Trabalhar apenas com elementos contínuos de forma a criar um sistema de equações que precisa ser compatibilizado (transformado em um sistema quadrado) antes de ser resolvido.

2 – Duplicar o nó dos dois elementos adjacentes ao canto e mover os pontos de colocação para dentro do elemento, figura 6.3.

3 – Criar sub-elementos

Nesse trabalho será tomada a segunda providência, cabe notar que os nós onde não há variação da tangente não são duplicados e ficam na extremidade do elemento.

Aqui também pode haver críticas quanto à escolha, já que o desenvolvimento das equações que resolvem as integrais de forma analítica tem fórmulas muito mais complicadas do que se tomado elementos contínuos, porem o autor insiste nessa abordagem prevendo maior simplicidade para estender o método usando elementos em três dimensões descontínuos do que com elementos contínuos.

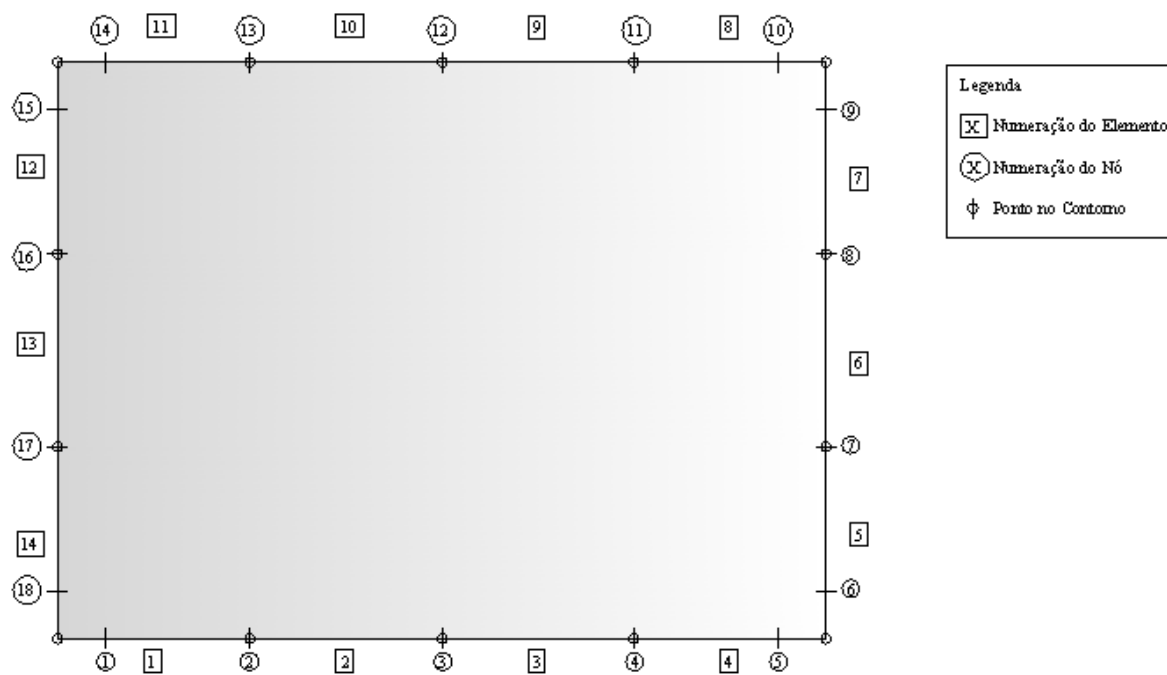


Figura 6.3a – Exemplo de chapa com numeração de nós e elementos

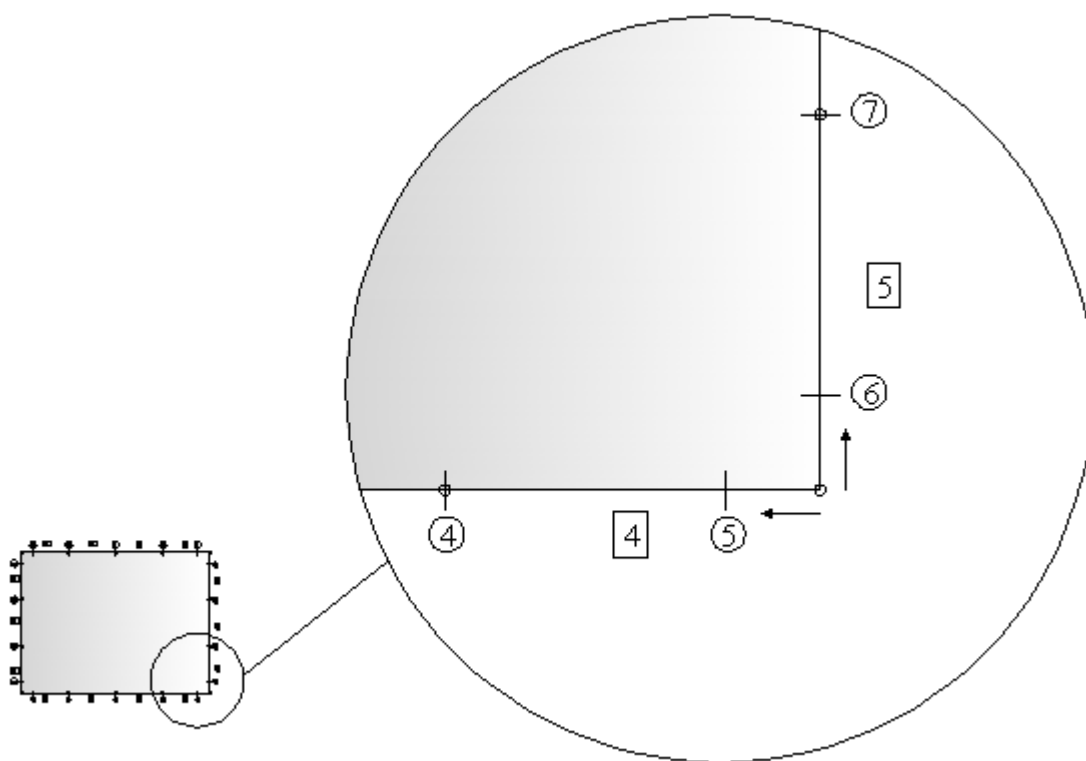


Figura 6.3b – Detalhe dos pontos de colocação movidos para dentro do elemento



### 6.4.1 Equilíbrio

#### 6.4.1.1 Elemento Contínuo

Para a resolução seguinte serão consideradas funções de forma escritas em coordenadas globais, considerando a distância  $r$  a partir do nó esquerdo do elemento conforme figura abaixo

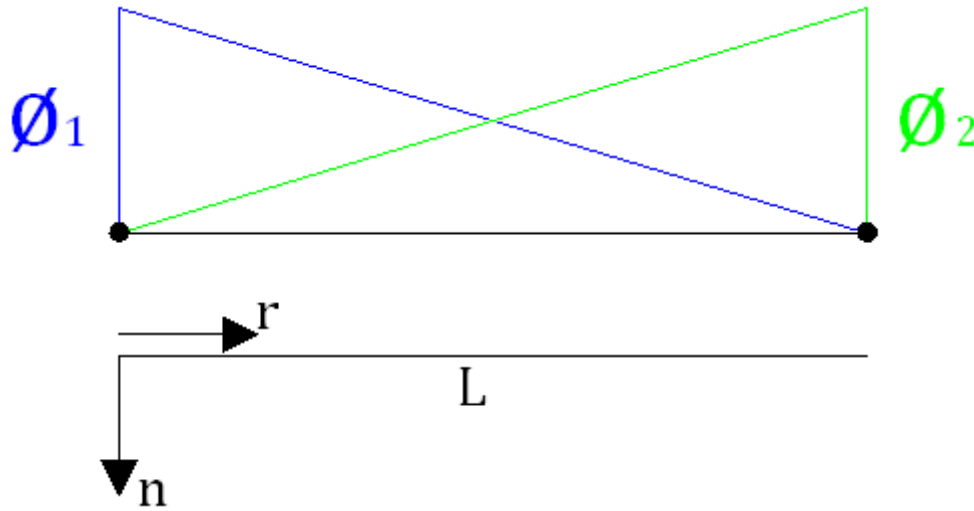


Figura 6.4 – Funções de forma em coordenadas globais

Assim as funções de forma são

$$\begin{aligned}\phi_1(r) &= \left(1 - \frac{r}{l}\right) \\ \phi_2(r) &= \left(\frac{r}{l}\right)\end{aligned}\tag{6.24}$$

Substituindo as funções de forma na eq. 6.21 a primeira integral do lado direito da equação fica na forma

$$q_1 \int_0^l \left(1 - \frac{r}{l}\right) \left(-\frac{1}{2\pi} \ln(r)\right) dr + q_2 \int_0^l \frac{r}{l} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln(r)\right) dr\tag{6.25}$$

Resolvendo a equação acima obtém-se

$$q_1 \left( l \frac{3 - 2 \ln(l)}{8\pi} \right) + q_2 \left( l \frac{1 - 2 \ln(l)}{8\pi} \right)$$

Agora notando o fato de a normal ser perpendicular ao raio para elemento linear a segunda integral se anula devido ao produto interno desses dois vetores ser zero, assim a eq. 6.21 fica na forma

$$\frac{1}{2} T(p_1) = q_1 \left( l \frac{3 - 2 \ln(l)}{8\pi} \right) + q_2 \left( l \frac{1 - 2 \ln(l)}{8\pi} \right) \quad (6.26)$$

onde  $p_1$  é o nó a esquerda do elemento (inicio do elemento).

Agora colocando o ponto fonte no nó à direita do elemento (fim do elemento) tem-se as seguintes funções de forma

$$\begin{aligned} \phi_1(r) &= \left( \frac{r}{l} \right) \\ \phi_2(r) &= \left( 1 - \frac{r}{l} \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

sendo agora  $r$  se deslocando do fim para o começo do elemento, notar que essas funções de forma são idênticas as anteriores trocando apenas os índices 1 e 2.

Assim a eq. 6.21 fica na forma

$$\frac{1}{2} T(p_2) = q_1 \left( l \frac{1 - 2 \ln(l)}{8\pi} \right) + q_2 \left( l \frac{3 - 2 \ln(l)}{8\pi} \right) \quad (6.28)$$

onde  $p_2$  é o nó a direita do elemento (fim do elemento).

#### 6.4.1.2 Elemento Descontínuo

Conforme dito anteriormente, quando houver descontinuidade geométrica o nó será duplicado e apenas o ponto de colocação deslocado para dentro do elemento, neste caso a integração será feita a partir desse nó até as extremidades do elemento conforme a figura

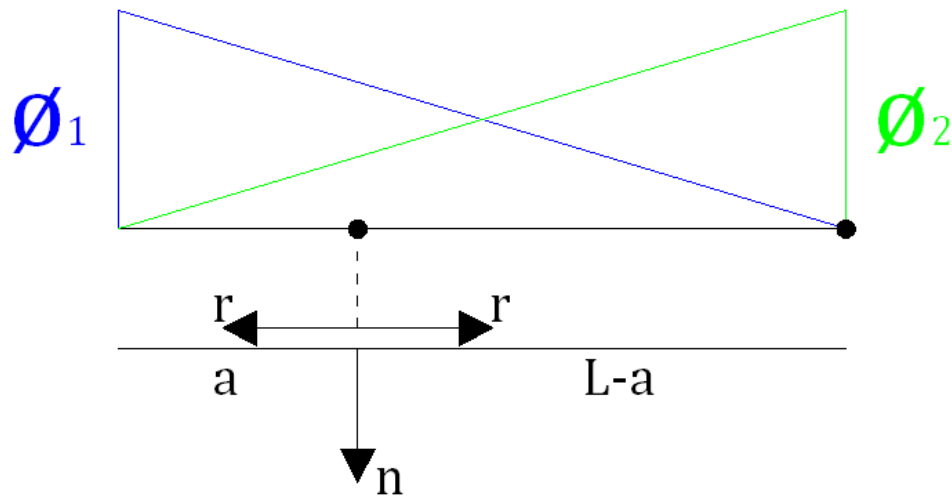


Figura 6.5 – Funções de forma em coordenadas globais com nó deslocado para dentro do elemento

Com essa configuração as funções de forma do elemento ficam como:

$$\phi_1(r) = \begin{cases} 1 + \frac{r-a}{l} & 0 \leq r \leq a \quad (-dr) \\ 1 - \frac{r+a}{l} & 0 \leq r \leq l-a \quad (dr) \end{cases}$$

$$\phi_2(r) = \begin{cases} \frac{a-r}{l} & 0 \leq r \leq a \quad (-dr) \\ \frac{a+r}{l} & 0 \leq r \leq l-a \quad (dr) \end{cases} \quad (6.29)$$

Neste caso a primeira integral do lado direito da eq. 6.21 dividida em duas partes fica na forma

Parte 1

$$q_1 \int_{\Gamma_j} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \phi_1 d\Gamma_j$$

$$= q_1 \int_0^a \left( \frac{l-a}{l} + \frac{r}{l} \right) \left( -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \right) dr + q_1 \int_0^{l-a} \left( \frac{l-a}{l} - \frac{r}{l} \right) \left( -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \right) dr$$

Parte 2

$$q_2 \int_{\Gamma_j} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \phi_2 d\Gamma_j = q_2 \int_0^a \left( \frac{a}{l} - \frac{r}{l} \right) \left( -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \right) dr + q_2 \int_0^{l-a} \left( \frac{a}{l} + \frac{r}{l} \right) \left( -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \right) dr$$

resolvendo as integrais para cada uma das partes temos

Parte 1

$$q_1 \int_{\Gamma_j} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \phi_1 d\Gamma_j = q_1 \frac{l(3l-2a) + 2a(a-2l) \ln(a) - 2(a-l)^2 \ln(l-a)}{8l\pi}$$

Parte 2

$$q_2 \int_{\Gamma_j} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \phi_2 d\Gamma_j = q_2 \frac{l(2a+l) - 2a^2 \ln(a) + 2(a^2 - l^2) \ln(l-a)}{8l\pi}$$

substituindo as equações acima na eq. 6.21 chegamos à expressão final quando o nó a ser deslocado é o nó da direita (início do elemento), cabe lembrar que o segundo termo da integral do lado direito da equação é anulado conforme descrito na seção anterior

$$\frac{1}{2} T(p_1) = q_1 \left( \frac{l(3l-2a) + 2a(a-2l) \ln(a) - 2(a-l)^2 \ln(l-a)}{8l\pi} \right) + q_2 \left( \frac{l(2a+l) - 2a^2 \ln(a) + 2(a^2 - l^2) \ln(l-a)}{8l\pi} \right)$$

(6.30)

notando também que como na seção anterior quando temos o nó a direita do elemento (fim do elemento) então há apenas uma inversão dos índices assim para esse nó, assim a eq. 6.21 fica na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T(p_2) = q_1 & \left( \frac{l(2a+l) - 2a^2 \ln(a) + 2(a^2 - l^2) \ln(l-a)}{8l\pi} \right) \\ & + q_2 \left( \frac{l(3l-2a) + 2a(a-2l) \ln(a) - 2(a-l)^2 \ln(l-a)}{8l\pi} \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

## 6.4.2 Transiente

### 6.4.2.1 Elemento Contínuo não Singular no Tempo

Se o passo de tempo não é singular e o elemento é contínuo no espaço podemos aplicar as funções de forma eq. 6.24 na eq. 6.23 onde já houve a integração no tempo obtendo então

Parte 1

$$q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j = q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] \left( 1 - \frac{r}{l} \right) dr$$

Parte 2

$$q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j = q_2 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] \left( \frac{r}{l} \right) dr \quad (6.32)$$

resolvendo as integrais obtém-se

Parte 1

$$\begin{aligned}
q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j \\
= q_1 \left\{ \frac{1}{8k\pi l} \left[ 4k\Delta t (\exp(-\beta_{F-1}^2) - 1) + 4k(t_F - t_f) (\exp(-\beta_{F-1}^2) - \exp(-\beta_F^2)) \right. \right. \\
\left. \left. + 2l^2\sqrt{\pi} \left( \frac{\text{erf}(\beta_{F-1})}{\beta_{F-1}} - \frac{\text{erf}(\beta_F)}{\beta_F} \right) + l^2 (E1(\beta_{F-1}^2) - E1(\beta_F^2)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Parte 2

$$\begin{aligned}
q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j \\
= q_2 \left\{ \frac{1}{8k\pi l} [-4k\Delta t (\exp(-\beta_{F-1}^2) - 1) - 4k(t_F - t_f) (\exp(-\beta_{F-1}^2) \right. \\
\left. - \exp(-\beta_F^2)) + l^2 (E1(\beta_{F-1}^2) - E1(\beta_F^2))] \right\}
\end{aligned}$$

(6.33)

onde

$$\beta_f = \frac{l}{2\sqrt{k(t_F - t_f)}} \quad \beta_{f-1} = \frac{l}{2\sqrt{k(t_F - t_f + \Delta t)}}$$

e erf é a função erro conforme será descrito no capítulo 8

#### 6.4.2.2 Elemento Contínuo Singular no Tempo

Nesse caso  $t_F = t_f$ , utilizando o mesmo procedimento da seção anterior e tomando o limite quando  $t_f$  se aproxima de  $t_F$  obtém-se

Parte 1

$$\begin{aligned}
 q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j \\
 &= \lim_{t_f \rightarrow t_F} q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] \left( 1 - \frac{r}{l} \right) dr \\
 &= q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) - E_1(\infty) \right] \left( 1 - \frac{r}{l} \right) dr \\
 &= q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) \left( 1 - \frac{r}{l} \right) dr
 \end{aligned}$$

Parte 2

$$\begin{aligned}
 q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j \\
 &= \lim_{t_f \rightarrow t_F} q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] \left( \frac{r}{l} \right) dr \\
 &= q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) - E_1(\infty) \right] \left( \frac{r}{l} \right) dr = q_1 \int_0^l \frac{1}{4\pi k} E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) \left( \frac{r}{l} \right) dr
 \end{aligned}$$

(6.34)

resolvendo as integrais obtém-se

Parte 1

$$q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j = \frac{\Delta t}{2\pi l} \left( \exp \left( -\frac{l^2}{4k\Delta t} \right) - 1 \right) + \frac{4\sqrt{k\pi\Delta t} \operatorname{erf} \left( \frac{l}{2\sqrt{k\Delta t}} \right) + l E_1 \left( \frac{l^2}{4k\Delta t} \right)}{8\pi k}$$

Parte 2

$$q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j = \frac{\Delta t}{2\pi l} \left( 1 - \exp \left( -\frac{l^2}{4k\Delta t} \right) \right) + \frac{l E_1 \left( \frac{l^2}{4k\Delta t} \right)}{8\pi k}$$

(6.35)



### 6.4.2.3 Elemento Descontínuo não Singular no Tempo

Nesse caso será utilizado o mesmo procedimento da seção 6.4.1.2, substituindo as funções de forma eq. 6.29 na equação com o núcleo de tempo já integrado eq. 6.23. Dividindo em duas partes obtém-se

Parte 1

$$\begin{aligned}
 q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j \\
 = q_1 \int_0^a \left( \frac{l-a}{l} + \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] dr \\
 + q_1 \int_0^{l-a} \left( \frac{l-a}{l} - \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] dr
 \end{aligned}$$

Parte 2

$$\begin{aligned}
 q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j \\
 = q_2 \int_0^a \left( \frac{a}{l} - \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] dr \\
 + q_2 \int_0^{l-a} \left( \frac{a}{l} + \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f + \Delta t)} \right) - E_1 \left( \frac{r^2}{4k(t_F - t_f)} \right) \right] dr
 \end{aligned}$$

(6.36)

resolvendo as equações anteriores obtém-se

Parte 1

$$\begin{aligned}
q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j &= q_1 \left\{ \frac{1}{8k\pi l} \left[ 4k\Delta t (\exp(-\delta_{f-1}^2) - \exp(-\gamma_{f-1}^2)) \right. \right. \\
&+ 4k(t_F - t_f) (\exp(-\delta_{f-1}^2) - \exp(-\delta_f^2) - \exp(-\gamma_{f-1}^2) + \exp(-\gamma_f^2)) \\
&+ 2\sqrt{\pi}(a-l) \left( (a-l) \left( \frac{\text{erf}(\delta_{f-1})}{\delta_{f-1}} - \frac{\text{erf}(\delta_f)}{\delta_f} \right) - a \left( \frac{\text{erf}(\gamma_{f-1})}{\gamma_{f-1}} - \frac{\text{erf}(\gamma_f)}{\gamma_f} \right) \right) \\
&\left. \left. + (a-l)^2 (E_1(\delta_{f-1}^2) - E_1(\delta_f^2)) - (a^2 - 2al) (E_1(\gamma_{f-1}^2) - E_1(\gamma_f^2)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Parte 2

$$\begin{aligned}
q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j &= q_2 \left\{ \frac{1}{8k\pi l} \left[ 4k\Delta t (\exp(-\gamma_{f-1}^2) - \exp(-\delta_{f-1}^2)) \right. \right. \\
&+ 4k(t_F - t_f) (\exp(-\gamma_{f-1}^2) - \exp(-\gamma_f^2) - \exp(-\delta_{f-1}^2) + \exp(-\delta_f^2)) \\
&+ 2\sqrt{\pi}(a) \left( (a) \left( \frac{\text{erf}(\gamma_{f-1})}{\gamma_{f-1}} - \frac{\text{erf}(\gamma_f)}{\gamma_f} \right) - (a-l) \left( \frac{\text{erf}(\varphi_{f-1})}{\varphi_{f-1}} - \frac{\text{erf}(\varphi_f)}{\varphi_f} \right) \right) \\
&\left. \left. + a^2 (E_1(\gamma_{f-1}^2) - E_1(\gamma_f^2)) - (a^2 - l^2) (E_1(\delta_{f-1}^2) - E_1(\delta_f^2)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

(6.37)

onde

$$\gamma_f = \frac{a}{2\sqrt{k(t_F - t_f)}} \quad \gamma_{f-1} = \frac{a}{2\sqrt{k(t_F - t_f + \Delta t)}}$$

$$\delta_f = \frac{a-l}{2\sqrt{k(t_F - t_f)}} \quad \delta_{f-1} = \frac{a-l}{2\sqrt{k(t_F - t_f + \Delta t)}}$$

#### 6.4.2.4 Elemento Descontínuo Singular no Tempo

Utilizando o mesmo procedimento da seção anterior, porem tomando o limite quando  $t_f$  tende a  $t_F$  tem-se

Parte 1

$$q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j = q_1 \int_0^a \left( \frac{l-a}{l} + \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) \right] dr + q_1 \int_0^{l-a} \left( \frac{l-a}{l} - \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) \right] dr$$

Parte 2

$$q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j = q_2 \int_0^a \left( \frac{a}{l} - \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) \right] dr + q_2 \int_0^{l-a} \left( \frac{a}{l} + \frac{r}{l} \right) \left[ E_1 \left( \frac{r^2}{4k\Delta t} \right) \right] dr$$

resolvendo as equações obtém-se

Parte 1

$$\begin{aligned} q_1 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_1 d\Gamma_j &= \frac{q_1}{8kl\pi} \left[ 4k\Delta t \left( \exp \left( -\frac{(a-l)^2}{4k\Delta t} \right) - \exp \left( -\frac{a^2}{4k\Delta t} \right) \right) \right. \\ &+ 4\sqrt{k\pi\Delta t}(a-l) \left( \operatorname{erf} \left( \frac{a-l}{2\sqrt{k\Delta t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{k\Delta t}} \right) \right) + E_1 \left( \frac{a^2}{4k\Delta t} \right) (2al - a^2) \\ &\left. + E_1 \left( \frac{(a-l)^2}{4k\Delta t} \right) (a-l)^2 \right] \end{aligned}$$

Parte 2

$$\begin{aligned} q_2 \int_{\Gamma_j} \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \phi_2 d\Gamma_j &= \frac{q_2}{8kl\pi} \left[ 4k\Delta t \left( \exp \left( -\frac{a^2}{4k\Delta t} \right) - \exp \left( -\frac{(a-l)^2}{4k\Delta t} \right) \right) \right. \\ &+ 4\sqrt{k\pi\Delta t}(a) \left( \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{k\Delta t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{a-l}{2\sqrt{k\Delta t}} \right) \right) + (a^2)E_1 \left( \frac{a^2}{4k\Delta t} \right) - (a^2 \\ &\left. - l^2)E_1 \left( \frac{(a-l)^2}{4k\Delta t} \right) \right] \end{aligned}$$

(6.28)

## 6.5 Condições Iniciais e de Contorno

### 6.5.1 Equilíbrio

Nesse ponto estão determinados todos os componentes do lado direito da eq. 6.21 exceto as temperaturas e fluxos nos pontos extremos do elemento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $q_1$  e  $q_2$ ), essas grandezas são as condições de contorno do problema.

Por definição, no regime em equilíbrio considera-se que há tempo suficiente para que as temperaturas e fluxos no interior do sólido ou fluido estacionem (parem de variar), assim não são relevantes as condições iniciais no problema bem como mudança nas condições de contorno durante o processo, sendo consideradas como condições de contorno as últimas a serem aplicadas.

Cabe lembrar que para a resolução do problema é necessário que o mesmo seja bem determinado, ou seja, todos os elementos devem ter uma e apenas uma condição de contorno (temperatura ou fluxo). Notar a vantagem nesse ponto em se trabalhar com elementos descontínuos.

Um caso especial é quando temos fontes internas de geração de calor, assim a equação de Laplace se tornaria a equação de Poisson na forma

$$\nabla^2 T = b(x)$$

onde  $b(x)$  é uma conhecida função de posição. A equação integral equivalente agora tem uma integral de domínio extra com as forças de corpo na forma

$$T(X') = \int_{\Gamma} [T^*(X', x)q(x) - q^*(X', x)T(x)]d\Gamma - \int_{\Omega} T^*(X', x)b(x)d\Omega$$

sendo que sua solução depende agora em dividir o interior do problema em células aplicando um esquema de integração numérica para a integral de domínio. Para evitar tal esquema menos vantajoso pode-se fazer uso de outros métodos como, por exemplo, o método da dupla reciprocidade. Tais métodos não serão discutidos nesse trabalho.

Um caso especial é quando as fontes internas de geração de calor são pontuais (concentradas), assim para uma fonte de intensidade  $P$  no ponto interno  $x^l$  o termo da força de corpo torna-se  $b(x) = P(x^l)\Delta(x, x^l)$ . Sendo  $M$  o número de fontes a equação integral agora pode ser escrita na forma

$$T(X') = \int_{\Gamma} [T^*(X', x)q(x) - q^*(X', x)T(x)]d\Gamma - \sum_{l=1}^M P(x^l)T^*(X', x^l) \quad (6.29)$$

Outro caso especial é quando a fonte interna de geração de calor é uma função harmônica, i.e.  $\nabla^2 b = 0$ , então essa fonte pode ser traduzida para o contorno com o procedimento análogo para a temperatura considerando uma função auxiliar  $\psi^*$

$$\int_{\Omega} (b\nabla^2\psi^* - \psi^*\nabla^2 b)d\Omega = \int_{\Gamma} \left(b\frac{\partial\psi^*}{\partial n} - \psi^*\frac{\partial b}{\partial n}\right)d\Gamma$$

O que se reduz para

$$\int_{\Omega} bT^*d\Omega = \int_{\Gamma} \left(b\frac{\partial\psi^*}{\partial n} - \psi^*\frac{\partial b}{\partial n}\right)d\Gamma$$

se uma função  $\psi^*$  pode ser encontrada de forma que  $\phi^* = \nabla^2\psi^*$ . Uma função assim é a solução fundamental da equação bi harmônica  $\nabla^4\phi = 0$ , i.e.

$$\psi^* = \frac{r^2}{8\pi} (1 - \ln(r))$$

Substituindo a solução fundamental na equação obtém-se

$$T(X') - \int_{\Gamma} [T^*(X', x)q(x) - q^*(X', x)T(x)]d\Gamma = \int_{\Gamma} [b(x)\frac{\partial\psi^*(X', x)}{\partial n} - \psi^*(X', x)\frac{\partial b(x)}{\partial n}]d\Gamma \quad (6.30)$$

### 6.5.2 Transiente

Para o regime transiente devem ser informadas as condições iniciais do problema (temperatura nos pontos internos) e as condições de contorno para cada passo de tempo, um caso especial muito comum é quando as temperaturas iniciais em todos os pontos internos do problema são iguais, assim se houver linearidade das condições de contorno (não há trocas por radiação e a condutividade  $k$  independe da temperatura) podemos considerar o problema em um referencial nulo simplificando a resolução.

Outro caso especial é quando o campo de temperaturas iniciais  $T_0$  é harmônico, i.e. satisfaz a equação de Laplace  $\nabla^2 T_0 = 0$ , sendo assim possível eliminar a integral de domínio eq.

6.17 resolvendo pela diferença  $T - T_0$ . A equação de difusão na ficará na seguinte forma:

$$\nabla^2 (T - T_0) = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{k} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial t}$$

como condição inicial  $T - T_0 = 0$  no tempo  $t_0$ .

A equação integral de contorno equivalente a eq. 6.17 é

$$\begin{aligned}
c(x')[T(x', t_F) - T_0(x')] + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} [T(x, t) - T_0(x)] q^*(x', x, t_F, t) d\Gamma dt \\
= k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} [q(x, t) - q_0(x)] T^*(x', x, t_F, t) d\Gamma dt
\end{aligned}
\tag{6.31}$$

Portanto, com uma mudança de variáveis, a equação integral de contorno é obtida somente com integrais de contorno. Note que o fluxo de calor inicial  $q_0$  pode ser obtido resolvendo o problema inicialmente como um problema em equilíbrio.

Caso haja fonte de geração interna de calor o campo interno de temperatura é dado pela integral de domínio sobre espaço e tempo na forma:

$$I_b(x', t_F) = k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} b(x, t) T^*(x', x, t_F, t) d\Omega dt \tag{6.32}$$

que é adicionada à equação integral 6.17. A equação acima envolve apenas termos conhecidos, porem para uma função geral  $b$  é necessário discretizar o domínio para resolução numérica, conforme dito na seção anterior. Alguns casos especiais podem eliminar a integração de domínio como será discutido a seguir.

Para fontes de geração de calor pontuais no domínio, o termo  $b$  pode ser escrito como

$$b(x, t) = \sum_{l=1}^M Q(x^l, t) \Delta(x, x^l)$$

onde  $Q(x^l, t)$  é a intensidade da fonte dependendo do tempo no ponto. Substituindo a expressão anterior na eq. 6.32 obtém-se

$$I_b(x', t_F) = k \sum_{l=1}^M \int_{t_0}^{t_F} Q(x^l, t) T^*(x', x^l, t_F, t) dt$$

Se a intensidade da fonte não varia no tempo, a equação acima pode ser simplificada como

$$I_b(x', t_F) = kQ(x^l) \sum_{l=1}^M \int_{t_0}^{t_F} T^*(x', x^l, t_F, t) dt$$

Após discretizar os passos de tempo, a integral resultante pode ser computada analiticamente como na expressão da eq. 6.23.

Se uma fonte harmônica é considerada, i.e. uma função  $b$  de forma que  $\nabla^2 b = 0$ , então pode ser utilizado o procedimento da seção anterior onde

$$\int_{\Omega} (\omega^* \nabla^2 b - b \nabla^2 \omega^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \omega^* \frac{\partial b}{\partial n} - b \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \right) d\Gamma$$

se a função  $\omega^*$  pode ser encontrada na forma que  $\nabla^2 \omega^* = T^*$ , a equação acima se reduz a

$$\int_{\Omega} b T^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( b \frac{\partial \omega^*}{\partial n} - \omega^* \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma$$

então, a integral de domínio  $I_b$  na eq. 6.32 torna-se

$$\begin{aligned} I_b(x', t_F) &= k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} b(x, t) T^*(x', x, t_F, t) d\Omega dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \left( b(x, t) \frac{\partial \omega^*(x', x, t_F, t)}{\partial n} - \omega^*(x', x, t_F, t) \frac{\partial b(x, t)}{\partial n} \right) d\Gamma dt \end{aligned}$$

(6.33)



## 6.6 Solução do Sistema Linear de Equações

### 6.6.1 Equilíbrio

Escrevendo novamente a eq. 6.21

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T(x') = & \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) [\phi_1(\xi)q_1 + \phi_2(\xi)q_2] d\Gamma_j \\ & - \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \frac{(x'_j - x_j)}{r^2} n_j(x) [\phi_1(\xi)T_1 + \phi_2(\xi)T_2] d\Gamma_j \end{aligned}$$

Tem-se todos os elementos para montar os sistema linear de equações, para isso serão utilizadas duas matrizes (geralmente denominadas de G e H) quadradas de  $N_e \times N_e$  elementos, a montagem seguirá os seguintes passos:

- 1- Cada linha corresponde a integração fixando um ponto fonte  $x'$ , esse ponto fonte é o nó (posição deslocada caso elemento descontínuo) esquerdo e direito de cada elemento.
- 2- Uma vez fixado o ponto fonte os elementos são percorridos um a um fazendo sua integração (analítica caso o ponto fonte  $x'$  esteja dentro do elemento, numérica em caso contrário), a do nó a esquerda será somada na coluna correspondente a numeração desse nó, ocorrendo o mesmo para o nó a direita.
- 3- Notar que há a contribuição do lado esquerdo da equação  $\frac{1}{2}T(x')$ , essa contribuição ( $\frac{1}{2}$ ) deverá ser adicionada a matriz onde há a integração do núcleo referente a

temperatura,  $H$ , sendo que caso o nó esteja deslocado deve haver uma interpolação para a coluna referente ao nó da esquerda e da direita conforme a função de forma.

A etapa seguinte é colocar os valores conhecidos de contorno nos vetores  $T$  e  $q$  sendo que cada linha corresponde ao nó onde é interpolada a condição de contorno, os valores desconhecidos serão deixados para serem preenchidos nas próximas etapas.

Assim o sistema rearranjado fica na forma

$$HT = Gq$$

Agora para se adequar aos algoritmos comuns de resolução de sistemas lineares deve-se deixar o sistema na forma

$$A \cdot x = b$$

onde  $x$  é o vetor de valores desconhecidos e  $b$  o vetor de valores conhecidos, para isso troca-se as colunas de  $H$  e  $G$  caso o valor desconhecido seja um fluxo na linha correspondente, conforme exemplo abaixo

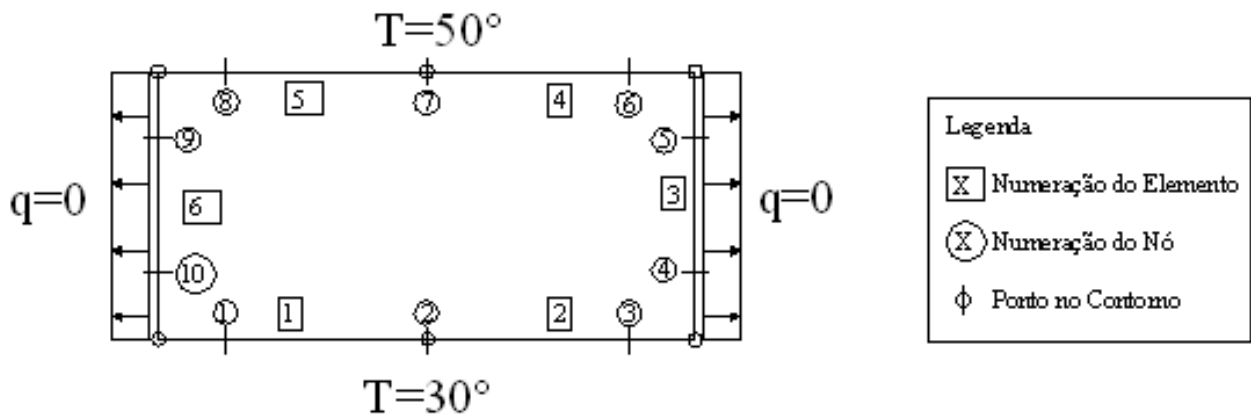


Figura 6.6 – Exemplo de Condições de Contorno em Chapa

Para esse exemplo a matriz A fica na forma

-G <sub>1,1</sub>	-G <sub>1,2</sub>	-G <sub>1,3</sub>	H <sub>1,4</sub>	H <sub>1,5</sub>	-G <sub>1,6</sub>	-G <sub>1,7</sub>	-G <sub>1,8</sub>	H <sub>1,9</sub>	H <sub>1,10</sub>
-G <sub>2,1</sub>	-G <sub>2,2</sub>	-G <sub>2,3</sub>	H <sub>2,4</sub>	H <sub>2,5</sub>	-G <sub>2,6</sub>	-G <sub>2,7</sub>	-G <sub>2,8</sub>	H <sub>2,9</sub>	H <sub>2,10</sub>
-G <sub>3,1</sub>	-G <sub>3,2</sub>	-G <sub>3,3</sub>	H <sub>3,4</sub>	H <sub>3,5</sub>	-G <sub>3,6</sub>	-G <sub>3,7</sub>	-G <sub>3,8</sub>	H <sub>3,9</sub>	H <sub>3,10</sub>
-G <sub>4,1</sub>	-G <sub>4,2</sub>	-G <sub>4,3</sub>	H <sub>4,4</sub>	H <sub>4,5</sub>	-G <sub>4,6</sub>	-G <sub>4,7</sub>	-G <sub>4,8</sub>	H <sub>4,9</sub>	H <sub>4,10</sub>
-G <sub>5,1</sub>	-G <sub>5,2</sub>	-G <sub>5,3</sub>	H <sub>5,4</sub>	H <sub>5,5</sub>	-G <sub>5,6</sub>	-G <sub>5,7</sub>	-G <sub>5,8</sub>	H <sub>5,9</sub>	H <sub>5,10</sub>
-G <sub>6,1</sub>	-G <sub>6,2</sub>	-G <sub>6,3</sub>	H <sub>6,4</sub>	H <sub>6,5</sub>	-G <sub>6,6</sub>	-G <sub>6,7</sub>	-G <sub>6,8</sub>	H <sub>6,9</sub>	H <sub>6,10</sub>
-G <sub>7,1</sub>	-G <sub>7,2</sub>	-G <sub>7,3</sub>	H <sub>7,4</sub>	H <sub>7,5</sub>	-G <sub>7,6</sub>	-G <sub>7,7</sub>	-G <sub>7,8</sub>	H <sub>7,9</sub>	H <sub>7,10</sub>
-G <sub>8,1</sub>	-G <sub>8,2</sub>	-G <sub>8,3</sub>	H <sub>8,4</sub>	H <sub>8,5</sub>	-G <sub>8,6</sub>	-G <sub>8,7</sub>	-G <sub>8,8</sub>	H <sub>8,9</sub>	H <sub>8,10</sub>
-G <sub>9,1</sub>	-G <sub>9,2</sub>	-G <sub>9,3</sub>	H <sub>9,4</sub>	H <sub>9,5</sub>	-G <sub>9,6</sub>	-G <sub>9,7</sub>	-G <sub>9,8</sub>	H <sub>9,9</sub>	H <sub>9,10</sub>
-G <sub>10,1</sub>	-G <sub>10,2</sub>	-G <sub>10,3</sub>	H <sub>10,4</sub>	H <sub>10,5</sub>	-G <sub>10,6</sub>	-G <sub>10,7</sub>	-G <sub>10,8</sub>	H <sub>10,9</sub>	H <sub>10,10</sub>

E o vetor b como produto da matriz

-H <sub>1,1</sub>	-H <sub>1,2</sub>	-H <sub>1,3</sub>	G <sub>1,4</sub>	G <sub>1,5</sub>	-H <sub>1,6</sub>	-H <sub>1,7</sub>	-H <sub>1,8</sub>	G <sub>1,9</sub>	G <sub>1,10</sub>
-H <sub>2,1</sub>	-H <sub>2,2</sub>	-H <sub>2,3</sub>	G <sub>2,4</sub>	G <sub>2,5</sub>	-H <sub>2,6</sub>	-H <sub>2,7</sub>	-H <sub>2,8</sub>	G <sub>2,9</sub>	G <sub>2,10</sub>
-H <sub>3,1</sub>	-H <sub>3,2</sub>	-H <sub>3,3</sub>	G <sub>3,4</sub>	G <sub>3,5</sub>	-H <sub>3,6</sub>	-H <sub>3,7</sub>	-H <sub>3,8</sub>	G <sub>3,9</sub>	G <sub>3,10</sub>
-H <sub>4,1</sub>	-H <sub>4,2</sub>	-H <sub>4,3</sub>	G <sub>4,4</sub>	G <sub>4,5</sub>	-H <sub>4,6</sub>	-H <sub>4,7</sub>	-H <sub>4,8</sub>	G <sub>4,9</sub>	G <sub>4,10</sub>
-H <sub>5,1</sub>	-H <sub>5,2</sub>	-H <sub>5,3</sub>	G <sub>5,4</sub>	G <sub>5,5</sub>	-H <sub>5,6</sub>	-H <sub>5,7</sub>	-H <sub>5,8</sub>	G <sub>5,9</sub>	G <sub>5,10</sub>
-H <sub>6,1</sub>	-H <sub>6,2</sub>	-H <sub>6,3</sub>	G <sub>6,4</sub>	G <sub>6,5</sub>	-H <sub>6,6</sub>	-H <sub>6,7</sub>	-H <sub>6,8</sub>	G <sub>6,9</sub>	G <sub>6,10</sub>
-H <sub>7,1</sub>	-H <sub>7,2</sub>	-H <sub>7,3</sub>	G <sub>7,4</sub>	G <sub>7,5</sub>	-H <sub>7,6</sub>	-H <sub>7,7</sub>	-H <sub>7,8</sub>	G <sub>7,9</sub>	G <sub>7,10</sub>
-H <sub>8,1</sub>	-H <sub>8,2</sub>	-H <sub>8,3</sub>	G <sub>8,4</sub>	G <sub>8,5</sub>	-H <sub>8,6</sub>	-H <sub>8,7</sub>	-H <sub>8,8</sub>	G <sub>8,9</sub>	G <sub>8,10</sub>
-H <sub>9,1</sub>	-H <sub>9,2</sub>	-H <sub>9,3</sub>	G <sub>9,4</sub>	G <sub>9,5</sub>	-H <sub>9,6</sub>	-H <sub>9,7</sub>	-H <sub>9,8</sub>	G <sub>9,9</sub>	G <sub>9,10</sub>
-H <sub>10,1</sub>	-H <sub>10,2</sub>	-H <sub>10,3</sub>	G <sub>10,4</sub>	G <sub>10,5</sub>	-H <sub>10,6</sub>	-H <sub>10,7</sub>	-H <sub>10,8</sub>	G <sub>10,9</sub>	G <sub>10,10</sub>

pelo vetor expresso na forma transposta

$$\{T_1 \ T_2 \ T_3 \ q_1 \ q_2 \ T_4 \ T_5 \ T_6 \ q_7 \ q_8\}^T$$

Após resolver o sistema utilizando, por exemplo, o método de eliminação de Gauss MEG o vetor x conterá as condições de contorno desconhecidas

$$\{q_1 \ q_2 \ q_3 \ T_1 \ T_2 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ T_7 \ T_8\}^T$$

## 6.6.2 Transiente

Reescrevendo a eq. 6.20

$$c_i T_{i,F} + k \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T q^* dt d\Gamma_j = k \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} q T^* dt d\Gamma_j$$

assumindo que as funções T e q não variam no tempo para cada passo de tempo e tomando procedimento similar ao da seção anterior, o sistema fica na forma

$$\sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F H_{ijFf} T_{j,f} = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F G_{ijFf} q_{j,f}$$

(6.34)

onde

$$\hat{H}_{ijFf} = k \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt d\Gamma_j$$

$$G_{ijFf} = k \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt d\Gamma_j$$

$$H_{ijFf} = \hat{H}_{ijFf} + c_i \delta_{ij} \delta_{Ff}$$

Assim as matrizes G e H podem ser montadas para cada passo de tempo f e para cada tempo final F resultando em um sistema na forma

$$\sum_{f=1}^F H_{Ff} T_f = \sum_{f=1}^F G_{Ff} Q_f$$

Para ser possível resolver esse sistema conforme mostrado na seção anterior, todas as condições de contorno até o passo final  $F$  tem que ser conhecidas, de forma que possa ser montado o sistema a seguir:

$$H_{FF}T_F = G_{FF}q_F + S_F$$

onde

$$S_F = - \sum_{f=1}^{F-1} H_{Ff}T_f + \sum_{f=1}^{F-1} G_{Ff}q_f$$

Isso é conhecido como convolução das matrizes e pode ser explicitado na forma

$$H_{11}\mathbf{T}_1 = G_{11}\mathbf{q}_1$$

(primeiro)

$$H_{22}\mathbf{T}_2 = G_{22}\mathbf{q}_2 + (G_{21}q_1 - H_{21}T_1)$$

(segundo)

$$H_{33}\mathbf{T}_3 = G_{33}\mathbf{q}_3 + (G_{31}q_1 + G_{32}q_2 - H_{31}T_1 - H_{32}T_2)$$

(terceiro)

$$H_{44}\mathbf{T}_4 = G_{44}\mathbf{q}_4 + (G_{41}q_1 + G_{42}q_2 + G_{43}q_3 - H_{41}T_1 - H_{42}T_2 - H_{43}T_3)$$

(quarto)

E assim por diante, até o tempo desejado  $F$ , onde os itens em negrito são à determinar.

Aqui cabem algumas observações sobre eficiência e estabilidade:

- 1- Notar que as soluções fundamentais  $T^*$  e  $q^*$  são dependentes de  $\tau$ ; assim tem-se  $H_{Ff} = H_{F'f'}$ , desde que  $F - f = F' - f'$  e o mesmo vale para  $G$ . Assim é conveniente guardar essas matrizes para reusar quando preciso.

- 2- É possível calcular todas as matrizes independentemente das condições de contorno, assim várias simulações podem ser feitas mudando-se apenas as condições de contorno
- 3- Deve-se tomar cuidado com a escolha da variação de tempo do passo  $\Delta t$ , quanto menor a escolha, menos precisa será a solução fundamental  $T^*$ , podendo deixar o solução instável.
- 4- A precisão de cada passo depende da precisão do passo anterior, assim a solução tem erros de truncamento causados pela aproximação numérica do problema real e erros de arredondamentos cuja principal fonte são os erros oriundos dos cálculos aritméticos com um número finito de dígitos. Esses erros vão se acumulando conforme avançamos para os passos seguintes, de forma que a solução pode divergir completamente da solução exata caso o intervalo de tempo total seja grande.

Cabe notar que a escolha de reiniciar a solução a partir do tempo inicial tem a desvantagem de ser mais onerosa do que considerando apenas o passo anterior, porem não acumula erro de forma tão drástica, pois os fluxos e temperaturas mais atuais (maior erro) são adicionados ou subtraídos junto aos fluxos e temperaturas mais antigos (menor erro) diluindo assim o erro na montagem final do sistema.

Na referência [34] há diversas sugestões de tratamentos a fim de diminuir esses erros, dentre elas:

- 1- Trabalhar com funções de interpolação de tempo de ordem maior como, por exemplo, funções lineares e funções quadráticas

- 2- Trabalhar com passo de tamanho adaptativo, ou seja, o  $\Delta t$  diminui para passos de tempo mais avançados
- 3- Particularmente, o método adotado, abordado como Método de Passos Múltiplos, tem vantagens sobre Métodos de Passos Simples ou Métodos de Partida como já descrito anteriormente, porem com custo maior. Assim caso a velocidade seja uma premissa poderia utilizar-se dos dois métodos de forma que o Método de Passos Múltiplos corrigiria alguns dos passos obtidos pelo Método de Passos Simples denominado então como Método de Previsão e Correção.

## 6.7 Cálculo da Temperatura nos Pontos Internos

### 6.7.1 Equilíbrio

Reescrevendo a eq. 6.7

$$T(X') = \int_{\Gamma} [T^*(X', x)q(x) - T(x)q^*(X', x)]d\Gamma$$

onde agora é conhecido o vetor  $q$  e  $T$  para todos os pontos no contorno, assim para calcular a temperatura em um ponto interno basta fixar o ponto fonte  $X'$  nesse ponto e recalcular as matrizes  $G$  e  $H$  integrando os núcleos das integrais. Para o caso de ser apenas um ponto fonte as matrizes  $G$  e  $H$  são vetores de tamanho  $N_p$  (número de pontos no contorno), caso seja desejado o cálculo da temperatura em mais de um ponto interno, as matrizes  $G$  e  $H$  terão dimensão de  $N_i \times N_p$  onde  $N_i$  é o número de pontos internos a calcular, sendo agora o resultado um vetor de pontos internos.

É importante notar que como os pontos são internos, eles estão “distantes” do contorno, sendo assim, não há singularidade na integração que pode ser feita utilizando integração numérica. Quando esses pontos se aproximam do contorno a integração numérica comum pode não mais ser suficiente podendo haver a necessidade de utilizar-se uma maior quantidade de pontos de integração (Pontos de Gauss) ou dividir os elementos próximos em elementos menores.

Em alguns casos também é importante encontrar o fluxo em pontos internos, para isso basta derivar a eq. 6.7 mostrada acima em relação à direção desejada ficando a equação na forma



$$\frac{\partial T(X')}{\partial X'_i} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T^*(X', x)}{\partial X'_i} q(x) - T(x) \frac{\partial q^*(X', x)}{\partial X'_i} \right] d\Gamma \quad (6.35)$$

Para o caso 2D os núcleos da integração ficam na forma

$$\frac{\partial T^*(X', x)}{\partial X'_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial X'_i} \ln(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial X'_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(X'_i - x_i)}{r^2} \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial q^*(X', x)}{\partial X'_i} = \frac{n_j(x)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial X'_i} \left[ \frac{(X'_j - x_j)}{r^2} \right] = \frac{1}{2\pi r^2} \left[ \delta_{ij} - \frac{2(X'_i - x_i)(X'_j - x_j)}{r^2} \right] n_j(x) \quad (6.37)$$

Notar que nesse caso a singularidade dos núcleos quando o ponto interno se aproxima do contorno é da forma de  $(1/r)$  e  $(1/r^2)$ , chamadas de singularidade forte e hipersingular respectivamente. Assim os métodos anteriores de integração (aumentar o número de pontos de Gauss ou dividir o elemento) podem também não serem suficientes exigindo técnicas de integração no sentido de partes finitas de Hadamard, referência [1], o que está além do escopo desse trabalho.

### 6.7.2 Transiente

Assim como foi feito na seção anterior, os pontos internos podem ser avaliados resolvendo a eq. 6.20 reescrita a seguir, montando as matrizes G e H em função do tempo e fixando o ponto fonte no ponto do interior do domínio a determinar.

$$T(X', F) = k \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} q T^* dt d\Gamma_j - k \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T q^* dt d\Gamma_j$$

As matrizes G e H serão multiplicadas pelos vetores de fluxo e temperatura determinados para cada passo de tempo até o tempo em que se deseja obter a temperatura. Note que o valor das temperaturas dos pontos internos podem ser avaliadas para qualquer tempo, independente da temperatura desses pontos em tempos anteriores, como por exemplo:

Tempo 1

$$T(X', 1) = k (G_{11}q_1 - H_{11}T_1)$$

Tempo 3

$$T(X', 3) = k(G_{31}q_1 + G_{32}q_2 + G_{33}q_3 - H_{31}T_1 - H_{32}T_2 - H_{33}T_3)$$

Tempo 5

$$T(X', 5) = k(G_{51}q_1 + G_{52}q_2 + G_{53}q_3 + G_{54}q_4 + G_{55}q_5 - H_{51}T_1 - H_{52}T_2 - H_{53}T_3 - H_{54}T_4 - H_{55}T_5)$$

Também como dito anteriormente caso o ponto esteja “distante” do contorno as integrações dos núcleos podem ser feitas numericamente. Caso seja o último passo de tempo,

$f = F$ , então os núcleos podem ser simplificados conforme mostrado abaixo

$$\int_{t_{F-1}}^{t_F} q^* dt = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{2\pi k r^2} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{r^2}{4k\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt =$$

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{2\pi k r^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\Delta t}\right)$$

$$\int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt = \frac{1}{\pi r^2} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{r^2}{4k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt = \frac{1}{4\pi k} \int_{a_{F-1}}^{a_F} \frac{\exp(-z)}{z} dz =$$

$$\frac{1}{4\pi k} E_1\left(\frac{r^2}{4k\Delta t}\right)$$

## 7. Técnica de Integração Numérica

Como foi posto anteriormente uma integral pode ser aproximada por uma soma e podem ser atribuídos pesos a cada um dos pontos da função a ser integrada de forma que

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NG} F(\xi_i) w_i$$

Na integração por pontos de Gauss, a localização dos pontos é arranjada de forma que tenha uma distribuição ótima, como será descrito a seguir. Os pesos são também ajustados para otimizar o processo. O conceito é bastante simples, e será explicado através de uma série de exemplos.

O primeiro problema tratado é bastante trivial. Suponha que é requerido integrar uma função linear sobre o intervalo -1 até 1. A resposta exata para essa integral e a soma ponderada (integração de Gauss) contendo um termo, são

$$I = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 x) dx = \left( a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = 2a_0$$

e

$$I_G = (a_0 + a_1 x_1) w_1$$

Por esse problema ser tão simples, pode ser determinado por inspeção que fazendo o ponto  $x_1 = 0$  e o peso  $w_1 = 2$ , o erro  $E = I - I_G$  é forçado para zero. Note que a fórmula exata para

a integração de uma função linear foi usada para esse resultado. Para tratar esse problema como um problema de otimização, primeiramente deve-se procurar pelo mínimo erro E para todos os polinômios de primeira ordem (função linear). Essas Funções são distinguidas das outras pelos coeficientes. Então, procuram-se os valores para os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$ , esse mínimo ocorre quando as derivadas parciais de E são simultaneamente iguais a zero.

$$E(a_0, a_1) = I - I_G = 2a_0 - (a_0 + a_1x_1)w_1$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 - w_1 = 0 ; \frac{\partial E}{\partial a_1} = -x_1w_1 = 0$$

Note que a solução simultânea das duas equações mostradas se iguala ao resultado obtido por inspeção acima ( $w_1 = 2, x_1 = 0$ ).

Considere agora a integração de um polinômio de ordem dois (função quadrática). Como será mostrada abaixo a fórmula da integração exata para essa função, uma soma ponderada (integração de Gauss) contem dois termos, o erro E associado a essa soma e a derivada parcial do erro de E em relação aos coeficientes do polinômio. Note que as derivadas parciais da função E em relação aos três coeficientes polinomiais irão todas ser zero no seu mínimo local.

$$I = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2)dx = (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3) \Big|_{-1}^1 = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2$$

$$I_G = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2)w_1 + (a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2)w_2$$

$$E = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2)w_1 - (a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2)w_2$$

e

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 - w_1 - w_2 = 0 ; \frac{\partial E}{\partial a_1} = -x_1w_1 - x_2w_2 = 0 ; \frac{\partial E}{\partial a_2} = \frac{2}{3} - x_1^2w_1 - x_2^2w_2 = 0$$

As três últimas equações mostradas acima contêm quatro variáveis desconhecidas. Isso não é um problema, sendo possível considerar os dois pesos de valores iguais. A primeira das três equações indica que os pesos são iguais a unidade. Note que isso faz a soma dos pesos ser igual a 2 (tamanho do intervalo). A segunda equação indica que  $x_1$  é o oposto de  $x_2$ . Essa propriedade poderia ser assumida em primeiro lugar, ao invés da suposição feita para os pesos. A última equação resulta

$$x_1^2 = \frac{1}{3} ; \text{ ou } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} ; x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350269189626$$

Ainda sobra para ser visto qual é o valor mínimo de E, obtido usando os pesos e pontos acima. Os valores dos pontos e pesos podem ser substituídos de volta na fórmula de integração de Gauss, produzindo

$$2a_0 + \frac{2}{3}a_2 - \left( a_0 + a_1 \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} \right] + a_2 \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]^2 \right) [1] \\ - \left( a_0 + a_1 \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \right] + a_2 \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^2 \right) [1] = E = 0$$

Subindo para a próxima ordem polinomial, considere a integração de um polinômio de ordem cúbica. Novamente é necessário determinar a fórmula de integração exata, uma soma ponderada contendo dois termos, o erro E associado ao uso da soma e as derivadas parciais de E em relação aos coeficientes do polinômio. A razão de poder continuar com uma soma de dois termos nesse problema é porque soma de dois termos resultam em quatro graus de liberdade ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $w_1$  e  $w_2$ ). Então, o polinômio de terceira ordem permite quatro graus de liberdade (as derivadas da expressão do erro em relação a  $(a_0, a_1, a_2$  e  $a_3)$ ). A fórmula exata de integração é a

mesma que foi obtida acima. Isso faz com que a primeira das três derivadas parciais a mesma que a do exemplo anterior e assim somente a nova derivada parcial é mostrada abaixo

$$I = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1x + a_2x^2)dx = \left( a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right)_{-1}^{+1} = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2$$

$$E = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3)w_1 - (a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3)w_2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_3} = -x_1^3w_1 - x_2^3w_2 = 0$$

Curiosamente, essa última equação, em comparação com as três equações do exemplo anterior, simplesmente replica o resultado do exemplo anterior. Portanto, a mesma regra para dois pontos pode ser usada para integrar exatamente tanto segundo e terceira ordem de polinômios.

Finalmente, considere a integração de um polinômio de ordem quatro, a fórmula integral exata, uma soma ponderada (dessa vez com três termos), o erro E e as derivadas parciais de E. A razão de subir o número de termos da soma é porque essa soma resulta em seis graus de liberdade ( $x_1, x_2, x_3, w_1, w_2$  e  $w_3$ ). Pode ser visto que o polinômio de quarta ordem permite cinco equações (as derivadas da expressão de erro E em relação à  $(a_0, a_1, a_2, a_3$  e  $a_4)$ ).

$$I = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)dx = 2 \left( a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} \right)$$

$$\begin{aligned}
E = & 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5}\right) - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4)w_1 \\
& - (a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + a_4x_2^4)w_2 \\
& - (a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + a_4x_3^4)w_3
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 - w_1 - w_2 - w_3 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = -x_1w_1 - x_2w_2 - x_3w_3 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = \frac{2}{3} - x_1^2w_1 - x_2^2w_2 - x_3^2w_3 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial a_4} = -x_1^3w_1 - x_2^3w_2 - x_3^3w_3 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_4} = \frac{2}{5} - x_1^4w_1 - x_2^4w_2 - x_3^4w_3 = 0$$

Tem-se cinco equações com seis variáveis desconhecidas. Simetricamente sugere que  $x_2$  deve receber zero, provendo, portanto uma sexta relação. A combinação da segunda e quarta equação indica que  $x_1 = -x_3$  e  $w_1 = w_3$ . Colocando essa informação de volta na primeira, terceira e quinta equação, obtém-se o resultado abaixo

$$2w_1 + 2w_2 = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3} &= 2w_1x_1^2 \rightarrow x_1^2 = \frac{1}{3w_1} \\ \frac{2}{5} &= 2w_1x_1^4 \rightarrow x_1^4 = \frac{1}{5w_1} \end{aligned} \right\} \frac{1}{9w_1^2} = \frac{1}{5w_1} \rightarrow w_1 = \frac{5}{9} = 0.55555 \ 55555 \ 55556$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{3w_1}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3\left(\frac{5}{9}\right)}\right)^{1/2} = \mp \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} = -0.77459 \ 66692 \ 41483$$

$$w_2 = 2 - 2w_1 = 2 - 2\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{18 - 10}{9} = \frac{8}{9} = 0.88888 \ 88888 \ 88889$$

75



Notar que, nesse resultado, e em todas as regras até agora, a soma dos coeficientes ponderados é igual a dois (o intervalo de comprimento). Isso deve sempre ser a regra para integrar com sucesso funções constantes exatamente.

O processo discutido acima pode ser continuado para uma família completa de regras de integração que pode ser usado para integrar exatamente polinômios de qualquer ordem.

O objetivo da integração numérica é integrar funções não polinomiais. Afinal de contas existem equações analíticas exatas para funções polinomiais. O erro da integração de Gauss para funções não polinomiais  $f$  usando  $N$  pontos é dada por

$$E = \frac{f^{(2N+2)}(\alpha)}{(2N+2)! K_{N+1}^2}$$

onde  $\alpha$  é um ponto no domínio do intervalo de integração e  $K$  é um numero constante, podem ser encontradas mais informações sobre o tema na referência [27].

A determinação dos pesos e coordenadas podem também ser obtido numericamente encontrando as raízes  $x_i$  do polinômio de Legendre  $P_n(x)$  sendo

$$w_i = \begin{cases} \frac{A_{n+1} \gamma_n}{A_n P'_n(x_i) P_{n+1}(x_i)} \\ \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{P_{n-1}(x_i) P'_n(x_i)} \end{cases}$$

onde  $A_n$  é o coeficiente de  $x^n$  em  $P_n(x)$ . Para polinômios de Legendre

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

portanto

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \begin{cases} \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \\ \frac{2n+1}{n+1} \end{cases}$$

adicionalmente

$$\gamma_n = \begin{cases} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \\ \frac{2}{2n+1} \end{cases}$$

portanto

$$w_i = \begin{cases} -\frac{2}{(n+1)P_{n+1}(x_i)P'_n(x_i)} \\ \frac{2}{nP_{n-1}(x_i)P'_n(x_i)} \end{cases}$$

usando a relação de recorrência

$$(1-x^2)P'_n(x) = \begin{cases} -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) \\ (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) \end{cases}$$

resulta finalmente em

$$w_i = \begin{cases} \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_n(x_i)]^2} \\ \frac{2(1-x_i^2)}{(n+1)^2[P_{n+1}(x_i)]^2} \end{cases}$$

Relações extraídas de [35]

As raízes de  $P_n$  e o valor de  $P_{n+1}(x_i)$  podem ser calculados numericamente tendo vários algoritmos disponíveis como na referência [36].

## 8. Algoritmos Utilizados nas Funções Matemáticas

Integral Exponencial  $E_1(x)$

A definição de  $E_1$  é dada por

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt \quad ; \quad x > 0$$

e seu gráfico fica na forma

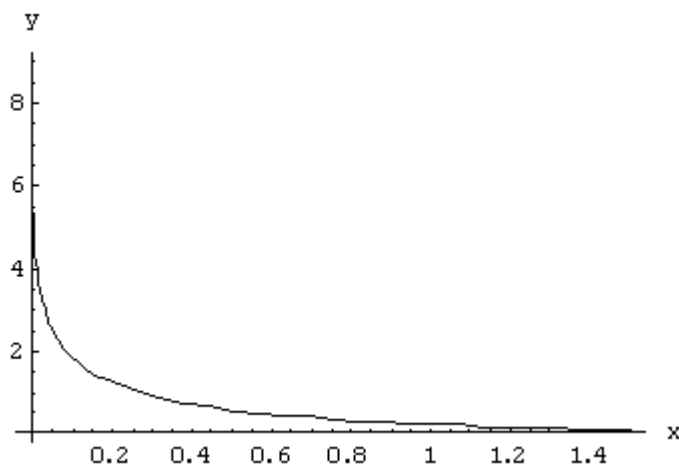


Figura 8.1 – Gráfico da função  $E_1$

sua expansão por séries fica na forma

$$E_1(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n n!}$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler  $\gamma = 0.5772156649$

Cabe lembrar que a implementação direta da expansão em séries da função  $E_1$  caminha perigosamente para números grandes antes de convergir, assim ela é indicada para calcular valores de  $x$  menores do que 1.

Para o cálculo de valores de  $x$  maiores do que 1 pode-se usar a função geral  $E_n$  mostrada a seguir e implementar o método de Frações Continuadas proposto em [37]

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt$$

Frações Continuadas

$$E_n(x) = \exp(-x) \left( \frac{1}{x+1} \frac{n}{1+x} \frac{1}{1+x} \frac{n+1}{1+x} \frac{2}{x+1} \dots \right) \quad ; \quad \text{com } n = 1$$

Função Erro Erf(x)

A definição de Erf é a integral da distribuição Gaussiana dada por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

e seu gráfico fica na forma

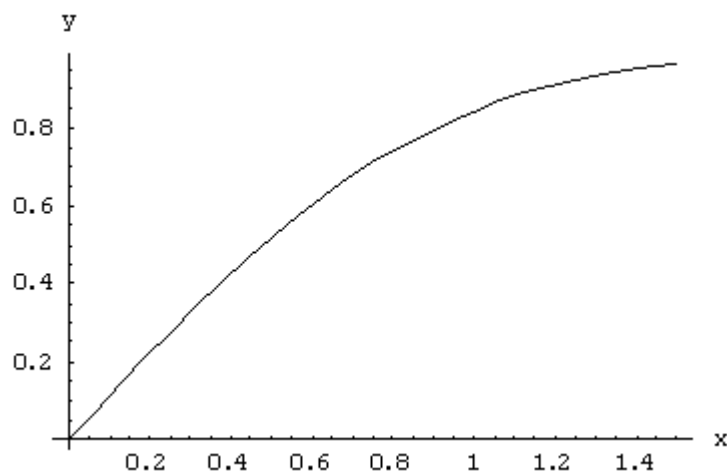


Figura 8.2 – Gráfico da função  $\text{erf}(x)$

A expansão em séries fica na forma

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)}$$

Implementar essa função por séries não é indicado para valores absolutos maiores que 2,2 sendo a expressão por frações continuadas abaixo mais indicada para isso.

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{x + \frac{1/2}{x + \frac{1}{x + \frac{3/2}{x + \frac{2}{x + \frac{5/2}{x + \frac{3}{x + \dots}}}}}}} \right)$$

## 9. Esquema do Programa Computacional Desenvolvido

Nesse trabalho foi desenvolvido um programa computacional que resolve tanto problemas em regime de equilíbrio como problemas em regime transiente. Para isso foi utilizado programação orientada a objetos, mais especificamente C++, segue abaixo algumas das vantagens encontradas em utilizar dessa abordagem:

- 1- O MEC trabalha discretizando o contorno em elementos, é natural que tais elementos possam ser traduzidos como objetos (base da orientação a objetos possuindo funções e variáveis próprias)
- 2- Trabalhar com objetos faz com que o código seja modular, ou seja, é possível estender o código para implementar outros tipos de elementos ou modificar o esquema de integração de um elemento por exemplo, sem grandes alterações no esquema geral do programa
- 3- Os Sistemas Operacionais atuais trabalham melhor com orientação ao objeto porque garante que o código gerado tenha localidade. Essa localidade deixa o programa mais rápido porque geralmente os sistemas operacionais não colocam todo o código do programa na memória (multiprogramação), ou seja, ele coloca pedaços de código em blocos, chamados de páginas, e distribui os pedaços de memória com o mesmo tamanho de uma página, chamado de frames, para os programas que estão rodando na máquina, assim como o próprio sistema operacional. Conforme os programas requisitam um trecho de código que não está na memória, o sistema operacional troca páginas que não estão sendo utilizadas pelas páginas contendo o código.

Localidade garante que o código não fique saltando de página para página diminuindo a necessidade de troca das páginas e facilitando a antecipação de uma requisição pelo sistema operacional.

Adaptado de (Stallings, William, Operating Systems, Internals and Design Principles, Fifth Edition, Pearson, 2005)

- 4- No MEC a montagem das matrizes consome grande parte do tempo de resolução, principalmente em se tratando de problemas transientes, cabe notar que a integração de um elemento é totalmente independente do resto do programa e a montagem da matriz independe da ordem em que se integram os elementos, dessa forma é relativamente simples construir um programa que faz uso efetivo da divisão do núcleo do processador e até mesmo possibilita que o programa rode em uma rede com vários computadores (multiprocessamento) dividindo a tarefa de montar a matriz para os diversos processadores

Nas próximas seções será mostrada a estrutura do programa desenvolvido para o regime em equilíbrio e para o regime transiente.

## 9.1 Estrutura de Arquivos do Programa

Arquivo	Descrição
stdlib.h	Biblioteca padrão de funções do console
iostream	Biblioteca padrão de entrada e saída
math.h	Biblioteca de funções matemáticas
fstream	Biblioteca padrão de manipulação de arquivos
string.h	Biblioteca padrão de manipulação de strings
pilha.h	Definição da classe Pilha
fila.h	Definição da classe Fila
vetor.h	Definição da classe Vetor + implementação das funções inline
vetor.cpp	Implementação das funções da classe Vetor
matriz.h	Definição da classe Matriz + implementação das funções inline
matriz.cpp	Implementação das funções da classe Matriz
estruturas.h	Arquivo que consolida os tipos de estruturas de dados definidas
elementos.h	define os elementos (classes): <ul style="list-style-type: none"><li>- Coord: pontos ou vetores de três coordenadas</li><li>- No: nós dos elementos</li><li>- Reta: base do elemento linear</li><li>- Linear: elemento propriamente dito</li></ul>
elementos.cpp	Implementa os elementos definidos
funcoes.h	Define as funções matemáticas a serem usadas no programa
funcoes.cpp	Implementa as funções matemáticas
sistema.h	Define a classe Sistema responsável pela montagem e solução do problema
sistema.cpp	Implementa as funções da classe Sistema
gerenciador.cpp	Cria a classe Sistema e chama suas funções

Tabela 9.1 – Estrutura de Arquivos do Programa

Observações sobre os arquivos:

1. Os arquivos `stdlib.h`, `iostream`, `math.h`, `fstream` e `string.h` são definidos pelo compilador
2. Os arquivos de estruturas de dados `pilha.h`, `fila.h`, `vetor.h` e `matriz.h` possuem classes definidas por templates, tipo de definição genérica onde a estrutura de dados pode conter qualquer tipo de objeto. Tais objetos precisam ser implementados na forma



inline (como uma macro, porem com estrutura de função), de forma que não necessitam de um arquivo .cpp já que a implementação ocorre na própria definição. No caso de vetor e matriz, como há funções que lidam apenas com números o autor optou por fazer a implementação dessas funções nos arquivos matriz.cpp e vetor.cpp.

3. O arquivo gerenciador.cpp implementa a comunicação entre o usuário e o sistema, onde até o momento é de forma simples utilizando o sistema de linha de comando (console), é previsto para um trabalho futuro a utilização de uma interface gráfica para geração do arquivo de entrada (pré-processamento) e da visualização dos resultados (pós-processamento) utilizando para isso pacotes computacionais do tipo MFC e OpenGL.

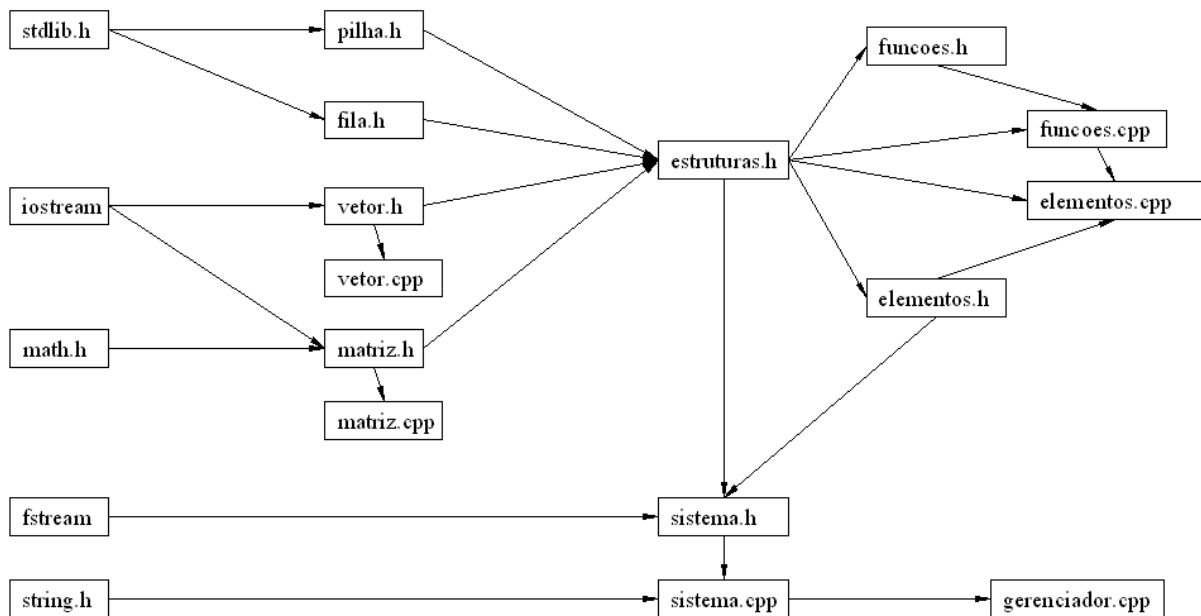


Figura 9.1 – Estrutura de dependência de arquivos

## 9.2 Diagrama de Classes do Programa

Abaixo são mostrados dois quadros com a descrição das variáveis e dos métodos das classes Sistema e Linear, seguido pelo diagrama de classes padrão UML.

Cabe notar que o diagrama de classes mostra as classes e suas relações de forma estática sendo apresentado o fluxo do programa para o caso em regime de equilíbrio e em regime transiente nas seções 9.3 e 9.4 respectivamente.

Classe Sistema		
Variáveis		
Tipo	Nome	Definição
ifstream	buffer	Buffer de leitura do arquivo
Vetor<Coord *>	vertice	vértices que definem o contorno do problema
Vetor<No *>	no	vetor de nós
Vetor<Linear *>	elemento	vetor de elementos
Vetor<Coord *>	pontoInterno	vetor de pontos internos a serem calculados
Métodos (Funções)		
Retorno	Protótipo	Definição
int	abrir(char * arquivo)	abre o arquivo de entrada (ex: chapa.txt)
void	equilibrio()	resolve problema em equilíbrio
void	transiente(double k, double deltaT, int F)	resolve problema no regime transiente
	~Sistema()	destructor (desaloca vetores de ponteiros)

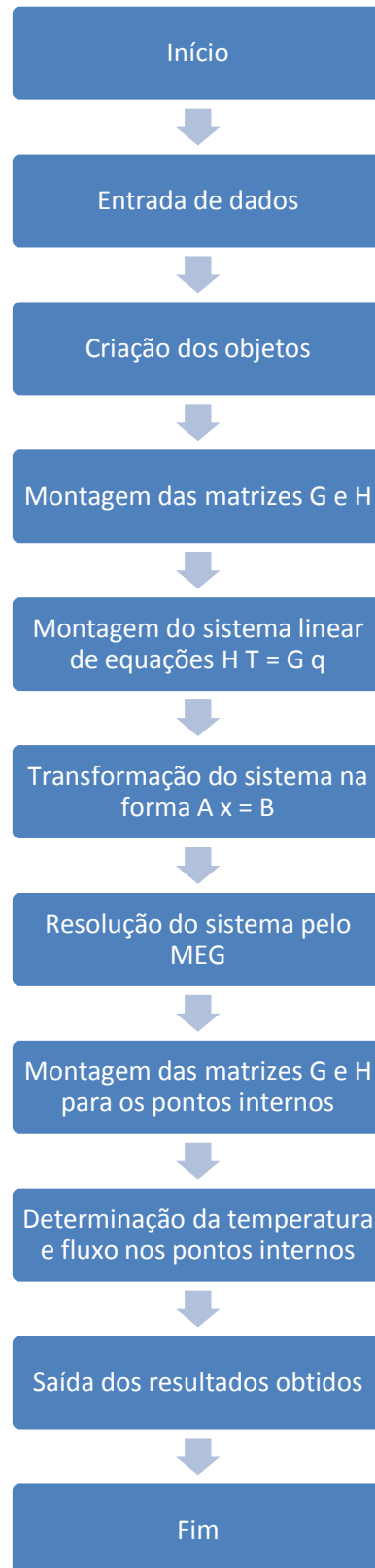
Tabela 9.2 – Quadro da classe Sistema

Classe Linear (define o elemento do tipo linear)		
Variáveis		
Tipo	Nome	Definição
No *	n1 e n2	Nós inicial e final do elemento
int	NGauss	Número de gauss usado na integração numérica
Vetor<double>	x e w	Coordenadas e pesos dos pontos de gauss
Métodos (Funções)		
Retorno	Protótipo	Definição
double	FN1(double qsi) const; FN2(double qsi) const	Funções de forma para a coordenada local qsi
void	equilibrioGHSingular(bool primeiroPonto, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G) const	Retorna em G e H a integração do elemento para ponto fonte no interior do elemento
void	equilibrioGHNumerica(const Coord & source, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G) const	Retorna em G e H a integração do elemento para ponto fonte (source) fora do elemento
void	equilibrioDerivadaGHNumerica(const Coord & source, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G, int dir) const	Retorna em G e H a derivada da integração do elemento para ponto fonte (source) fora do elemento na direção dir
void	transienteGHSingular(bool primeiroPonto, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G, double k, int tF, int tf, double deltaT) const	Retorna em G e H a integração do elemento para ponto fonte no interior do elemento no tempo tf, k é a difusividade, tF é o tempo final e deltaT o intervalo de tempo entre os passos
void	transienteGHNumerica(const Coord & source, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G, double k, int tF, int tf, double deltaT) const	Retorna em G e H a integração do elemento para ponto fonte (source) fora do elemento no tempo tf, k é a difusividade, tF é o tempo final e deltaT o intervalo de tempo entre os passos
	Linear(No * n1, No * n2, int NGauss) Linear(Coord * p1, Coord * p2, No * n1, No * n2, int NGauss)	Construtores da classe
Void	equilibrioGH(const Coord * source, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G, bool derivada = false, int dir = 1) const	integra os kernels G e H e soma no vetor (linha da Matriz G e H) o valor correspondente de acordo com o ID (coluna) de cada um dos nós (n1 e n2)
void	transienteGH(const Coord * source, Vetor<double> & H, Vetor<double> & G, double k, int tF, int tf, double deltaT, bool derivada = false, int dir = 0) const	integra os kernels G e H e soma no vetor (linha da Matriz G e H) o valor correspondente de acordo com o ID (coluna) de cada um dos nós (n1 e n2) tF é a quantidade de tempos total, tf e o tempo atual e deltaT e o intervalo de tempo

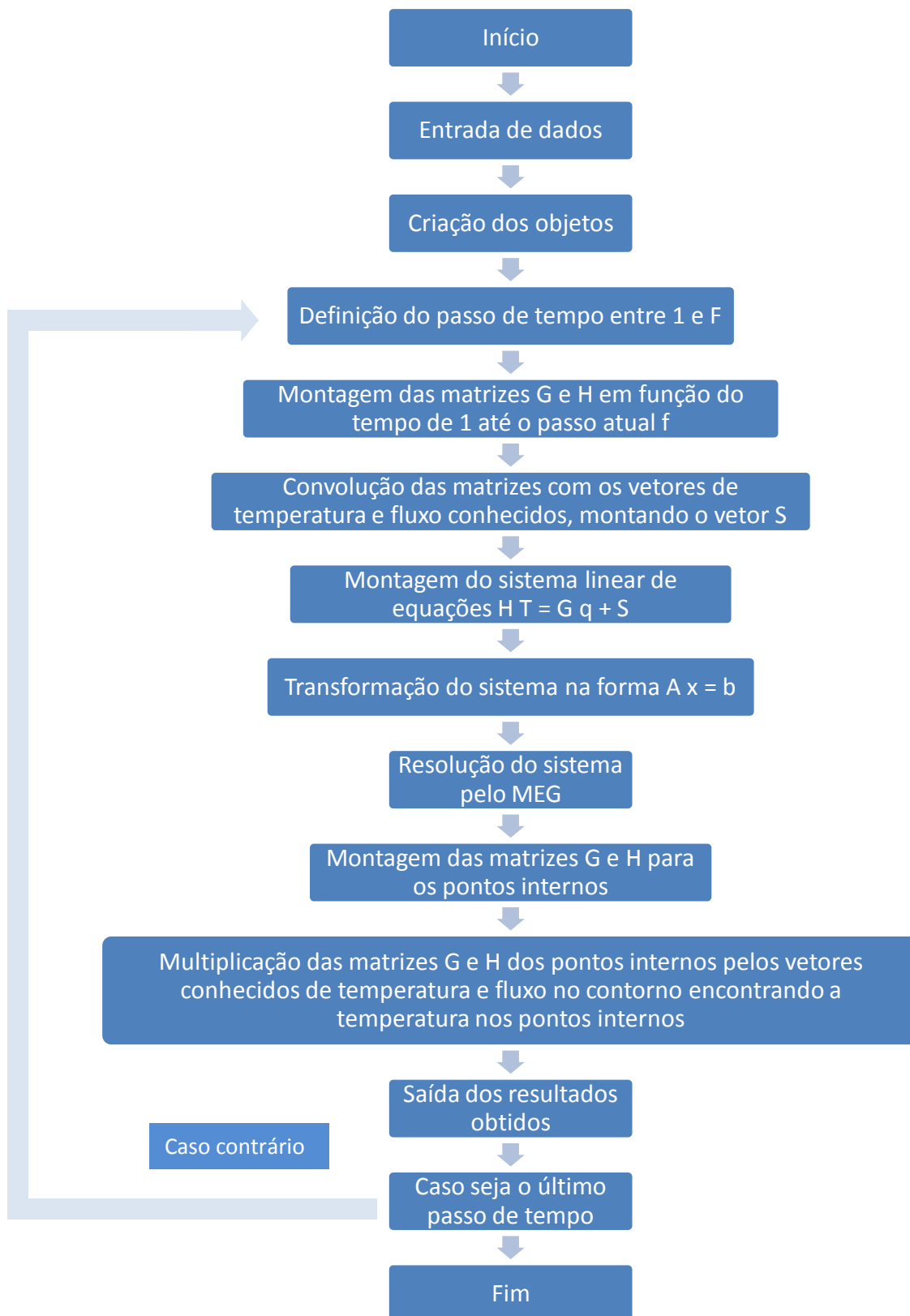
Tabela 9.3 – Quadro da classe Linear



### 9.3 Equilíbrio – Diagrama de Fluxo



#### 9.4 Transiente – Diagrama de Fluxo



## 10. Exemplos Numéricos

Neste capítulo serão mostrados exemplos de problemas de condução de calor no regime transiente para ilustrar o método apresentado.

Para todos os exemplos é adotada difusividade térmica  $k = 1.0$ .

### 10.1 Exemplo 1

Uma chapa retangular com  $a = 10$  m de comprimento e  $b = 8$  m de largura submetida a temperatura inicial  $T(x,y,0) = 0.0$  °C isolada nas bordas laterais, e com temperatura constante nas outras duas bordas conforme  $T(0,y,t) = 0.0$  °C e  $T(a,y,t) = 1.0$  °C assim como mostrado no esquema abaixo.

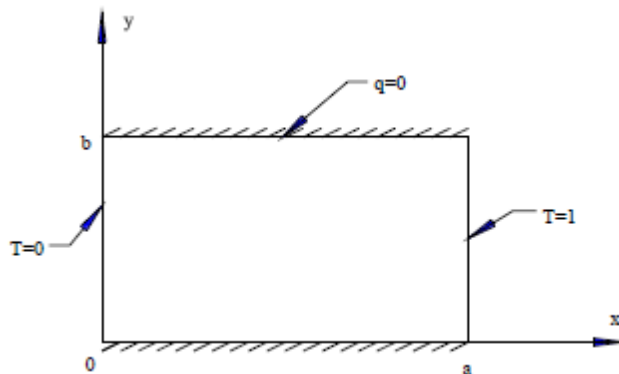


Figura 10.1 – Geometria e condições de contorno do exemplo 1

A solução analítica apresentada por Carslaw e Jaeger [31, p. 100] com o último termo igual a zero devido a condição inicial  $T_0 = 0$  é

$$T(x,t) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_2 \cos(n\pi) - T_1}{n} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \exp \left( \frac{-kn^2\pi^2 t}{L^2} \right)$$

Fazendo simulações para pontos no contorno e pontos fora do elemento a  $\frac{1}{4}$  do ponto de colocação obtém-se os resultados conforme os quadros a seguir

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta t = 10s$ 10 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)	$\Delta t = 10s$ 10 Elem/reta Pontos Fora (°C)	Erro Relativo (%)
10	0,26276	0,21521	18,10	0,20480	22,06
20	0,41157	0,37778	8,21	0,37459	8,99
30	0,46704	0,44511	4,70	0,44470	4,78
40	0,48772	0,47374	2,87	0,47418	2,78
50	0,49542	0,48643	1,81	0,48704	1,69
60	0,49829	0,49234	1,19	0,49290	1,08

Tabela 10.1a – Resultados Exemplo 1

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta t = 5s$ 20 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)	$\Delta t=5s$ 20 Elem/reta Pontos Fora (°C)	Erro Relativo (%)
10	0,26276	0,23501	10,56	0,23166	11,84
20	0,41157	0,39460	4,12	0,39381	4,32
30	0,46704	0,45669	2,22	0,45673	2,21
40	0,48772	0,48128	1,32	0,48153	1,27
50	0,49542	0,49131	0,83	0,49157	0,78
60	0,49829	0,49557	0,55	0,49578	0,50

Tabela 10.1b – Resultados Exemplo 1



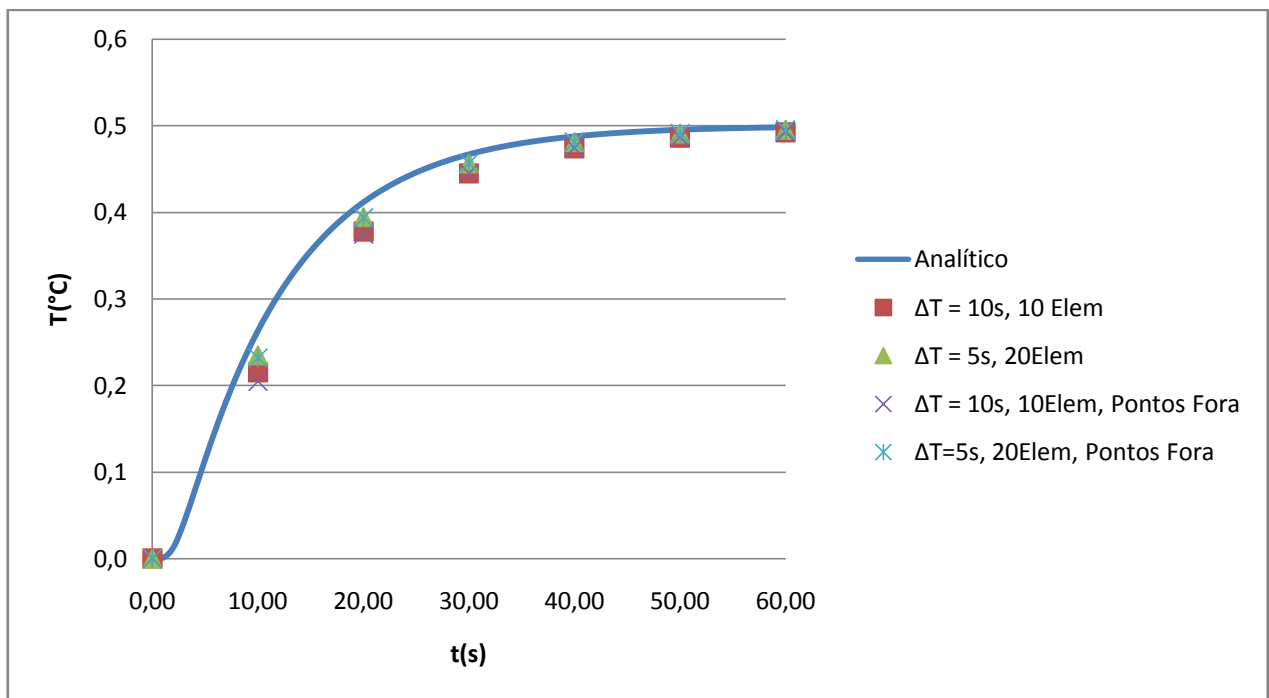


Figura 10.2 – Gráfico dos resultados do exemplo 1

## 10.2 Exemplo 2

Considerando a mesma geometria e condição inicial  $T_0 = 0.0 \text{ °C}$  do exemplo 1, porem agora com a condição de contorno na borda da direita como  $q_0 = 0.1 \text{ W/m}$  constante no tempo conforme o esquema abaixo.

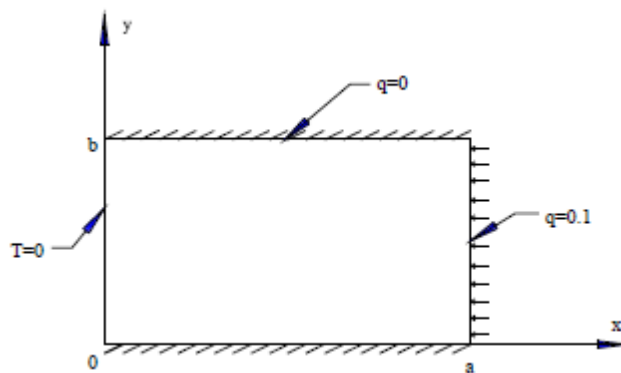


Figura 10.3 – Geometria e condições de contorno do exemplo 2

A solução analítica obtida em Carslaw e Jaeger [31, p. 113] fica na forma

$$T(x, t) = \frac{q_0 x}{K} - \frac{8q_0 L}{K\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \exp\left(\frac{-k(2n+1)^2 \pi^2 t}{4L^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)$$

Fazendo simulações para pontos no contorno e pontos fora do elemento a ¼ do ponto de colocação obtem-se os resultados conforme os quadros a seguir

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta t = 10s$ 10 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)	$\Delta t = 10s$ 10 Elem/reta Pontos Fora (°C)	Erro Relativo (%)
0	0,00000	0,00000	---	0,00000	---
10	0,05913	0,08370	41,55	0,07755	31,15
20	0,15084	0,17966	19,11	0,17326	14,86
30	0,22668	0,25346	11,81	0,24786	9,34
40	0,28639	0,30920	7,96	0,30456	6,34
50	0,33309	0,35149	5,52	0,34776	4,40
60	0,36959	0,38377	3,84	0,38083	3,04
70	0,39810	0,40856	2,63	0,40628	2,05
80	0,42038	0,42768	1,74	0,42595	1,32
90	0,43779	0,44250	1,08	0,44122	0,78
100	0,45139	0,45404	0,59	0,45311	0,38
110	0,46202	0,46306	0,23	0,46241	0,08
120	0,47033	0,47014	0,04	0,46970	0,13
130	0,47681	0,47572	0,23	0,47545	0,29
140	0,48188	0,48013	0,36	0,47998	0,39
150	0,48585	0,48363	0,46	0,48358	0,47
160	0,48894	0,48642	0,52	0,48645	0,51
170	0,49136	0,48866	0,55	0,48874	0,53
180	0,49325	0,49046	0,57	0,49058	0,54
190	0,49472	0,49192	0,57	0,49206	0,54
200	0,49588	0,49310	0,56	0,49326	0,53

Tabela 10.2a – Resultados Exemplo 2

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta t = 5s$ 20 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)	$\Delta t=5s$ 20 Elem/reta Pontos Fora (°C)	Erro Relativo (%)
0	0,00000	0,00000	---	0,00000	---
10	0,05913	0,07237	22,39	0,06986	18,15
20	0,15084	0,16693	10,67	0,16428	8,91
30	0,22668	0,24200	6,76	0,23965	5,72
40	0,28639	0,29975	4,66	0,29778	3,98
50	0,33309	0,34414	3,32	0,34253	2,83
60	0,36959	0,37834	2,37	0,37705	2,02
70	0,39810	0,40476	1,67	0,40376	1,42
80	0,42038	0,42524	1,16	0,42446	0,97
90	0,43779	0,44113	0,76	0,44055	0,63
100	0,45139	0,45351	0,47	0,45308	0,37
110	0,46202	0,46316	0,25	0,46285	0,18
120	0,47033	0,47070	0,08	0,47049	0,03
130	0,47681	0,47661	0,04	0,47648	0,07
140	0,48188	0,48125	0,13	0,48117	0,15
150	0,48585	0,48490	0,20	0,48487	0,20
160	0,48894	0,48778	0,24	0,48778	0,24
170	0,49136	0,49006	0,26	0,49008	0,26
180	0,49325	0,49186	0,28	0,49191	0,27
190	0,49472	0,49330	0,29	0,49336	0,27
200	0,49588	0,49445	0,29	0,49451	0,28

Tabela 10.2b – Resultados Exemplo 2

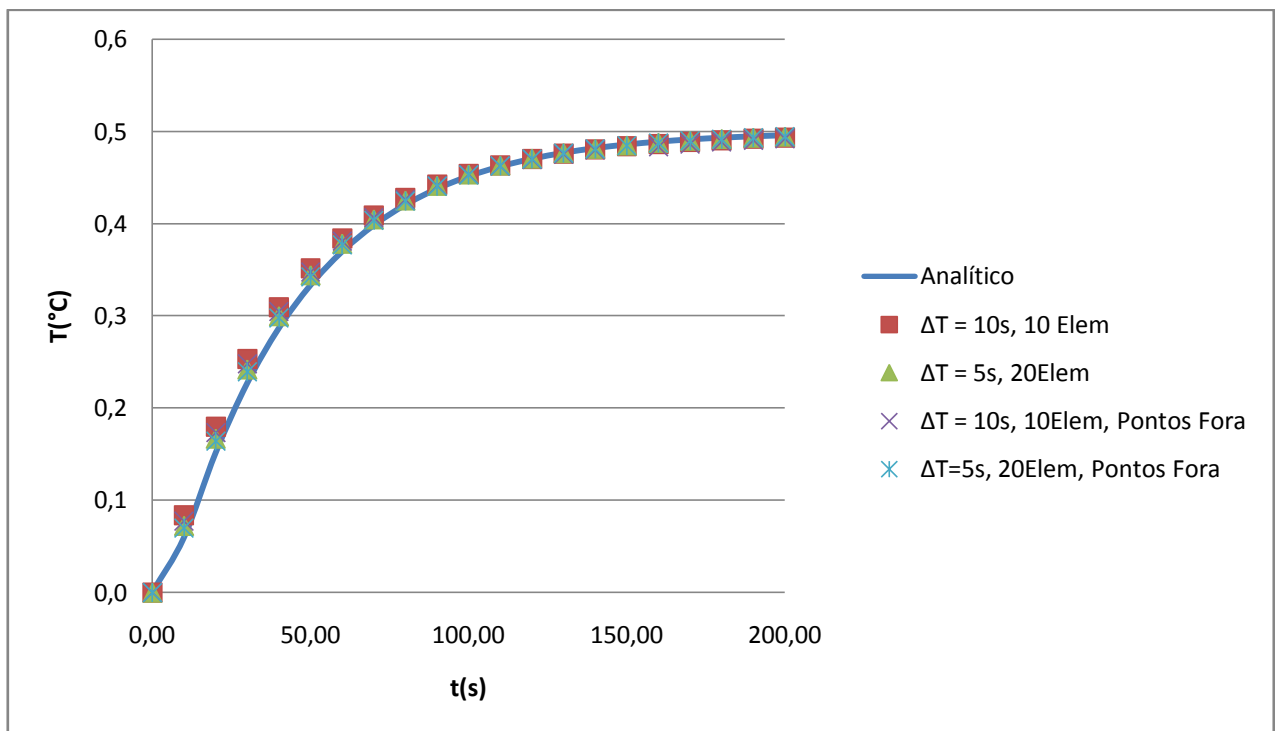


Figura 10.4 - Gráfico dos resultados do exemplo 2

Para esse exemplo também foi feita uma variação de parâmetros com pontos de colocação no contorno de forma a esclarecer a diferença entre aumentar a quantidade de elementos e diminuir o intervalo de tempo entre os passos, os resultados são mostrados no quadro a seguir.

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta t = 10s$ 10 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)	$\Delta t=10s$ 20 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)	$\Delta t=5s$ 10 Elem/reta (°C)	Erro Relativo (%)
0	0,00000	0,00000	---	0,00000	---	0,00000	---
10	0,05913	0,08370	41,55	0,08366	41,49	0,07241	22,47
20	0,15084	0,17966	19,11	0,17959	19,06	0,16702	10,73
30	0,22668	0,25346	11,81	0,25337	11,78	0,24210	6,80
40	0,28639	0,30920	7,96	0,30912	7,94	0,29985	4,70
50	0,33309	0,35149	5,52	0,35143	5,50	0,34423	3,34
60	0,36959	0,38377	3,84	0,38372	3,82	0,37841	2,39
70	0,39810	0,40856	2,63	0,40851	2,62	0,40482	1,69
80	0,42038	0,42768	1,74	0,42765	1,73	0,42528	1,17
90	0,43779	0,44250	1,08	0,44248	1,07	0,44117	0,77
100	0,45139	0,45404	0,59	0,45403	0,58	0,45353	0,47
110	0,46202	0,46306	0,23	0,46305	0,22	0,46317	0,25
120	0,47033	0,47014	0,04	0,47014	0,04	0,47071	0,08
130	0,47681	0,47572	0,23	0,47572	0,23	0,47661	0,04
140	0,48188	0,48013	0,36	0,48013	0,36	0,48125	0,13
150	0,48585	0,48363	0,46	0,48363	0,46	0,48490	0,20
160	0,48894	0,48642	0,52	0,48643	0,51	0,48777	0,24
170	0,49136	0,48866	0,55	0,48867	0,55	0,49005	0,27
180	0,49325	0,49046	0,57	0,49047	0,56	0,49186	0,28
190	0,49472	0,49192	0,57	0,49192	0,57	0,49329	0,29
200	0,49588	0,49310	0,56	0,49311	0,56	0,49444	0,29

Tabela 10.2c – Resultados da variação de parâmetros exemplo 2

### 10.3 Exemplo 3

Nesse caso também será usada a chapa dos exemplos anteriores, sendo a condição de contorno temperatura constante  $T = 1^\circ\text{C}$ , conforme o esquema abaixo.

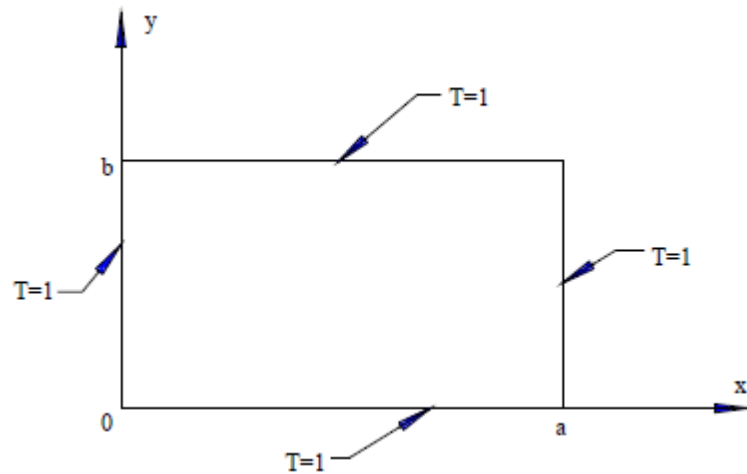


Figura 10.5 - Geometria e condições de contorno do exemplo 3

Note que nesse exemplo a temperatura no interior do domínio varia em duas direções (2D), a solução analítica obtida em Carslaw and Jaeger [31, p.185] é

$$T(x, y, t) = T_1 - \frac{16T_1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi y}{2b}\right) \exp\left[\frac{-k\pi^2 t}{4} \left(\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}\right)\right]$$

Nesse exemplo serão feitas duas simulações, uma utilizando o programa desenvolvido com  $\Delta t = 1s$  e 20 elementos/linha e outra utilizando o pacote computacional ANSYS® com malha de 12 x 12 elementos retangulares e  $\Delta t = 1s$ , para os dois casos é considerado o ponto central da chapa. Segue o quadro com os resultados obtidos.

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta T = 1s$ , 20Elem/reta BEM	Erro Relativo BEM (%)	$\Delta T = 1s$ 12x12Elem, ANSYS	Erro Relativo ANSYS (%)
0,00	0,00000	0,00000	---	0,00000	---
1,00	0,01016	0,00693	31,78	0,05040	395,96
2,00	0,11358	0,09236	18,68	0,14742	29,79
3,00	0,27050	0,23959	11,42	0,26593	1,69
4,00	0,42025	0,38870	7,51	0,38522	8,34
5,00	0,54550	0,51710	5,21	0,49399	9,44
6,00	0,64564	0,62139	3,76	0,58795	8,94
7,00	0,72435	0,70413	2,79	0,66664	7,97
8,00	0,78578	0,76913	2,12	0,73137	6,92
9,00	0,83359	0,81997	1,63	0,78404	5,94
10,00	0,87076	0,85966	1,27	0,82664	5,07
11,00	0,89963	0,89062	1,00	0,86096	4,30
12,00	0,92206	0,91475	0,79	0,88855	3,63
13,00	0,93948	0,93356	0,63	0,91069	3,06
14,00	0,95300	0,94822	0,50	0,92845	2,58
15,00	0,96350	0,95965	0,40	0,94268	2,16
16,00	0,97166	0,96855	0,32	0,95409	1,81
17,00	0,97799	0,97549	0,26	0,96323	1,51
18,00	0,98291	0,98090	0,20	0,97055	1,26
19,00	0,98673	0,98511	0,16	0,97641	1,05
20,00	0,98969	0,98840	0,13	0,98111	0,87

Tabela 10.3 – Resultados Exemplo 3

Plotando os resultados obtém-se a figura a seguir.

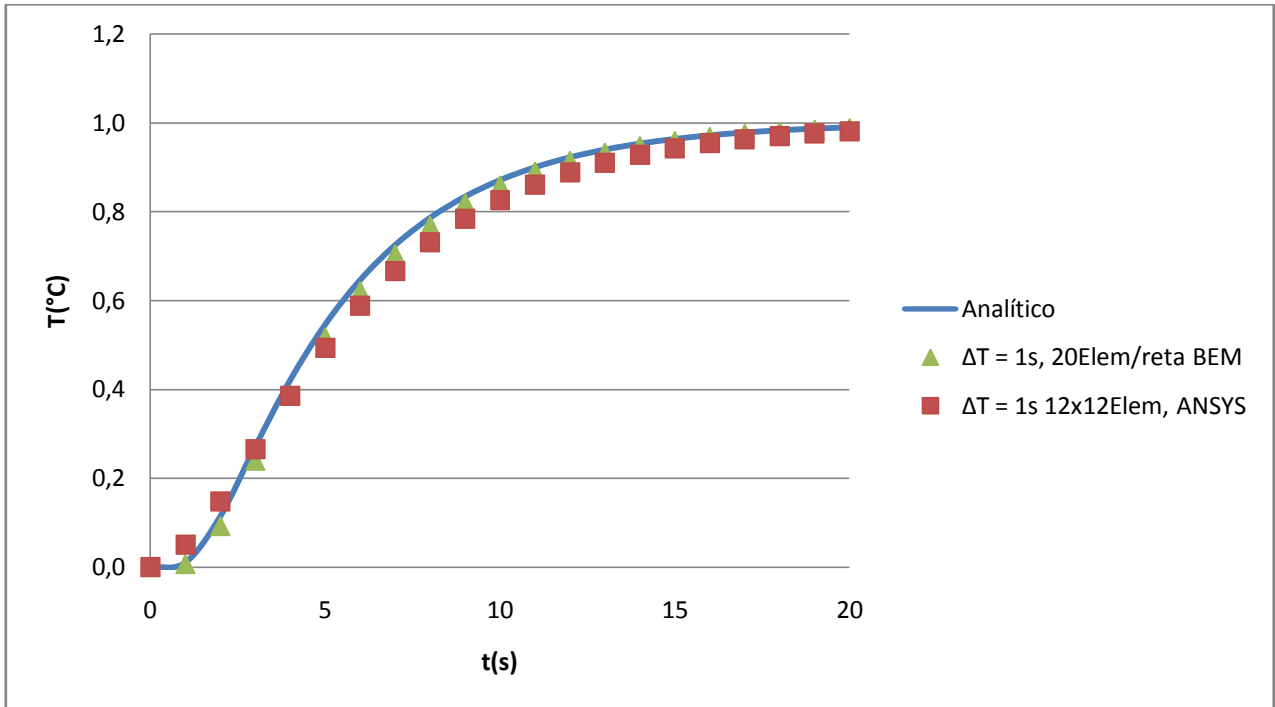


Figura 10.6 - Gráfico dos resultados do exemplo 3

#### 10.4 Exemplo 4

Nesse exemplo será simulado uma chapa circular de raio  $a = 1\text{m}$  com condição inicial  $T_0 = 0,0^{\circ}\text{C}$  e temperatura constante  $T(a) = 1,0^{\circ}\text{C}$  no contorno onde serão medidas as temperaturas no centro da chapa  $r = 0\text{m}$ .

No esquema abaixo é mostrada a geometria da chapa, seus carregamentos e os elementos que discretizam o contorno, serão utilizadas 20 retas subdivididas em 4 elementos lineares por reta.



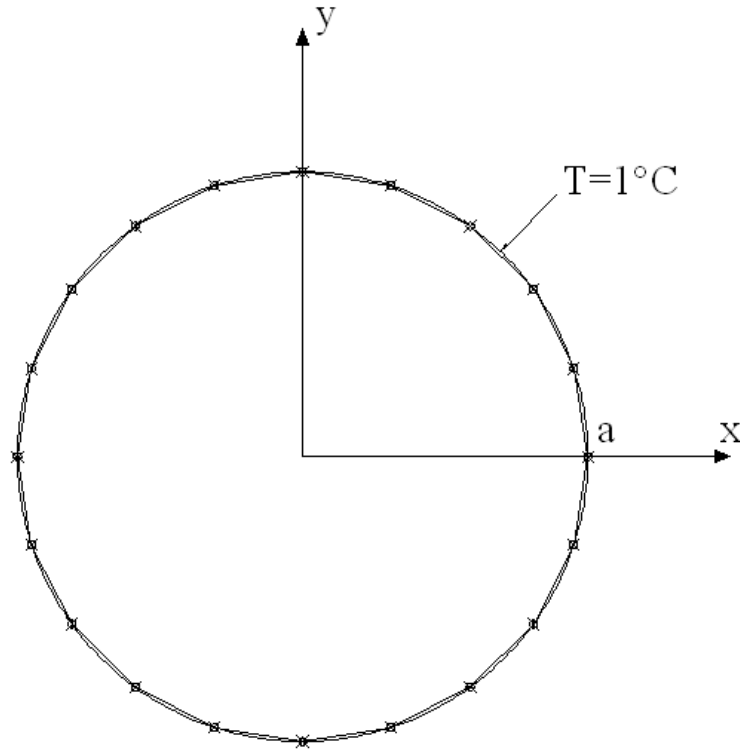


Figura 10.7 – Geometria, condições de contorno e elementos do exemplo 4

A solução analítica obtida em Carslaw and Jaeger [31, p.199] é

$$T(r, t) = T_1 - \frac{2T_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k\alpha_n t) \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)}$$

Onde  $J_n$  é a função de Bessel de ordem  $n$  e  $\alpha_n$  é a  $n$ -ésima raiz positiva de  $J_0(a\alpha) = 0$

No quadro a seguir são mostrados os resultados.

Tempo (s)	Temperatura Valor Analítico (°C)	$\Delta T = 0,1s$ , 20 retas 4Elem/reta	Erro Relativo BEM (%)
0,00	0,00000	0,00000	---
0,10	0,15165	0,11508	24,11
0,20	0,49851	0,44639	10,46
0,30	0,71751	0,67985	5,25
0,40	0,84151	0,81694	2,92
0,50	0,91111	0,89551	1,71
0,60	0,95015	0,94036	1,03
0,70	0,97204	0,96595	0,63
0,80	0,98432	0,98054	0,38
0,90	0,99121	0,98888	0,24
1,00	0,99507	0,99363	0,14

Tabela 10.4a – Resultados Exemplo 4

Plotando os resultados obtém-se o gráfico abaixo.

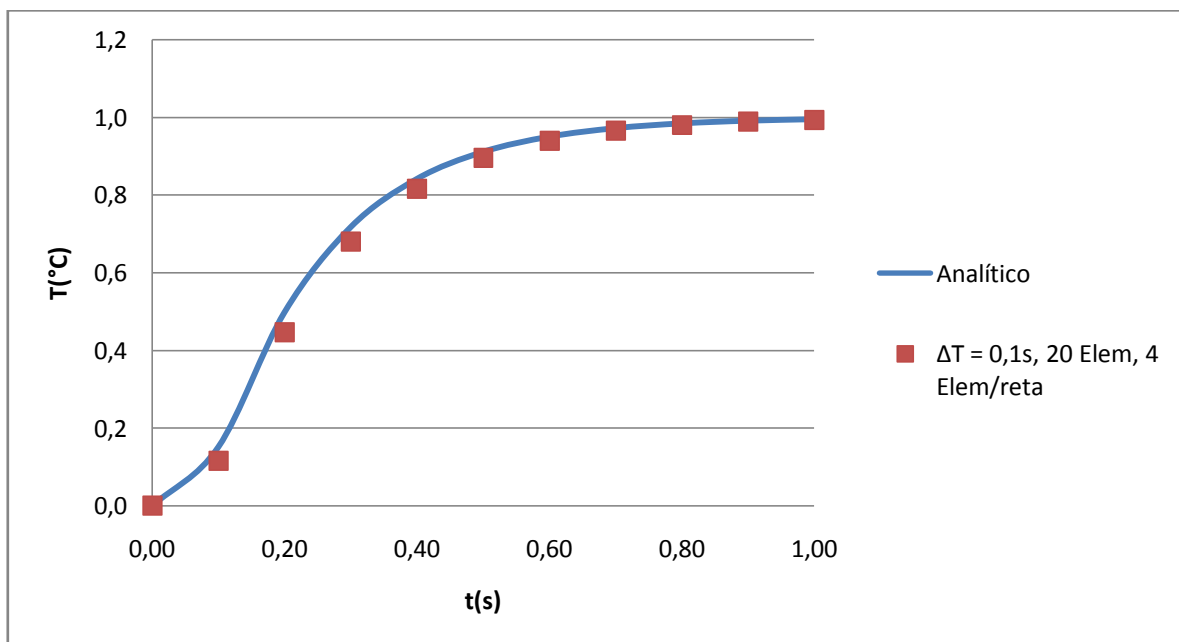


Figura 10.8 - Gráfico dos resultados do exemplo 4

Para esse exemplo também foi feita uma variação de parâmetros de forma a esclarecer a diferença entre aumentar a quantidade de elementos e diminuir o intervalo de tempo entre os passos, os resultados são mostrados no quadro a seguir.

t (s)	T(°C)	$\Delta T = 0,1s$ , 20 Elem, 4 Elem/reta	Erro Relativo (%)	$\Delta T = 0,1s$ , 40 Elem, 2 Elem/reta	Erro Relativo (%)	$\Delta T = 0,05s$ , 20 Elem, 4 Elem/reta	Erro Relativo (%)
0,00	0,00000	0,00000	---	0,00000	---	0,00000	---
0,10	0,15165	0,11508	24,11	0,11149	26,48	0,12939	14,68
0,20	0,49851	0,44639	10,46	0,43959	11,82	0,47477	4,76
0,30	0,71751	0,67985	5,25	0,67359	6,12	0,70320	2,00
0,40	0,84151	0,81694	2,92	0,81209	3,50	0,83345	0,96
0,50	0,91111	0,89551	1,71	0,89202	2,10	0,90661	0,49
0,60	0,95015	0,94036	1,03	0,93796	1,28	0,94764	0,26
0,70	0,97204	0,96595	0,63	0,96434	0,79	0,97064	0,14
0,80	0,98432	0,98054	0,38	0,97949	0,49	0,98354	0,08
0,90	0,99121	0,98888	0,24	0,98820	0,30	0,99077	0,04
1,00	0,99507	0,99363	0,14	0,99320	0,19	0,99482	0,02

Tabela 10.4b – Resultados da variação de parâmetros exemplo 4

## 11. Conclusão

Nesse trabalho foi desenvolvida a técnica de deslocamento do ponto de colocação para o interior de elementos descontínuos, essa abordagem apresenta uma dificuldade em relação a outras técnicas, principalmente no que se refere a integração do núcleo singular que foi realizada de forma analítica utilizando o pacote computacional Mathematica®. Tal abordagem foi escolhida por facilitar o tratamento de elementos espaciais (3D), o qual será abordado no próximo trabalho.

Do ponto de vista computacional o cálculo analítico dos núcleos singulares é mais lento do que o numérico devido às funções complexas envolvidas e a grande quantidade de operações, problema esse que pode ser evitado utilizando um vetor de respostas pré-gravadas dessas funções e fazendo uma interpolação do resultado mais próximo a coordenada requerida.

Outra abordagem interessante também é fazer com que cada elemento escolha a quantidade de pontos de Gauss na integração numérica de acordo com a distância do ponto fonte, já que a precisão da integração varia conforme essa distância.

A escolha de elementos lineares demonstrou-se acertada como se observa nos resultados dos exemplos quando a geometria é totalmente linear, caso comum na engenharia, e também responde bem quando a geometria é curva como no exemplo 4. Notar que os erros relativos médios do exemplo 3 e do exemplo 4 se assemelham para a mesma quantidade de elementos, desconsiderando as questões de escala.

Nos exemplos 1 e 2 a colocação dos pontos fonte fora do contorno apresenta ótimos resultados em relação àqueles com pontos fonte no contorno, o que demonstra que essa técnica pode ser adotada como estudo inicial em casos mais complicados onde a integração analítica dos núcleos pode ser difícil. Nota-se que no exemplo 2 os resultados quando os pontos fontes estão fora do contorno a  $\frac{1}{4}$  do elemento apresentam-se melhores que os resultados com os pontos no contorno. O autor acredita que tal anomalia se deve ao erro numérico ser maior no cálculo das integrais analíticas do que o erro gerado pelo deslocamento dos pontos fontes para fora do contorno.

Para todos os exemplos nota-se que o erro relativo é maior para os primeiros passos de tempo, o que do ponto de vista do sistema de convolução das matrizes, deveria ser o contrário, tal fato ocorre porque a solução converge para um valor já que as condições de contorno não mudam durante o tempo e, além disso, há um erro numérico maior para o cálculo dos resultados quando o tempo atual é igual ao tempo final  $f = F$  do passo, principalmente quando  $\Delta t$  for pequeno. Cabe lembrar que o sistema de convolução das matrizes dilui o erro pela consideração de todos os passos até o passo atual, conforme explicado anteriormente, assim os passos seguintes aos passos iniciais não acumulam todo esse erro respondendo de forma mais precisa.

Nos exemplos 2 e 4 foram feitas variações de parâmetros de quantidade de elementos e intervalo de tempo e conclui-se que a forma de obter melhores resultados é diminuindo o intervalo de tempo, resguardando a questão de estabilidade para intervalo de passos de tempo muito pequenos, cabe notar que no exemplo 4 para uma mesma quantidade total de

elementos, 80 elementos, o resultado para 20 retas com 4 elementos por reta é um pouco melhor do que o para 40 retas com 2 elementos por reta, o autor acredita que apesar da segunda simulação discretizar melhor a geometria do problema ela tem uma quantidade muito maior de integrações analíticas, as quais geram um erro maior do que a primeira simulação.

## 12. Bibliografia

- [1] Wrobel, L. C., The Boundary Element Method, Volume 1, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics, Wiley, 2002.
- [2] Fredholm, I., Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta Mathematica, 27, 365-390, 1903.
- [3] Kupradze, V.D., Potential Methods in the Theory of Elasticity, Israel Programme for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- [4] Mikhlin, S.G., Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [5] Muskhelishvili, N.I., Singular Integral Equations, P. Noordhoff, Groningen, 1953.
- [6] Massonnet, Ch., Solution générale du problème aux tensions de l'élasticité tridimensionnelle, Proc. 9<sup>th</sup> International Congress in Applied Mechanics, Brussels, 1956.
- [7] Smith, A.M.O. and Pierce, J., Exact solution of the Neumann problem. Calculation of the plane and axially symmetric flow about or within arbitrary boundaries, Proc. 3<sup>rd</sup> U.S. National Congress of Applied Mechanics, 807-815, 1958.
- [8] Banaugh, R.P. and Goldsmith, W., Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape, Journal of the Acoustical Society of America, 35, 1590-1601, 1963.
- [9] Cruse, T.A., Numerical solutions in three dimensional elastostatics, International Journal of Solids and Structures, 5, 1259-1274, 1969.
- [10] Hess, J.L. e Smith, A.M.O., Calculation of potential flows about arbitrary bodies, Progress in Aeronautical Sciences, 8 (D. Kücheman, Ed.), Pergamon Press, London, 1967.
- [11] Jaswon, M.A. and Ponter, A.R., An integral equation solution of the torsion problem, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 273, 237-246, 1963.
- [12] Jaswon, M.A., Integral equation method in potential theory, I, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 275, 23-32, 1963.
- [13] Rizzo, F.J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 25, 83-95, 1967.
- [14] Shaw, R.P. and Fredman, M.B., Diffraction of a plane shock wave by a free cylindrical obstacle at a free surface, Proc. 4<sup>th</sup> U.S. National Congress of Applied Mechanics, 371-379, 1962.

- [15] Symm, G.T., Integral equation method in potential theory, II, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 275, 33-46, 1963
- [16] Lachat, J.C. and Watson, J.O., Effective numerical treatment of boundary integral equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, 991-1005, 1976.
- [17] Jaswon, M. and Symm, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, London, 1977.
- [18] Brebbia, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1978.
- [19] Beer, G. and Watson, J.O., Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers, Wiley, Chichester, 1992.
- [20] Hall, W.S., The Boundary Element Method, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [21] Paris, F. and Cañas, J., Boundary Element Method: Fundamentals and Applications, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [22] Beer, G., Programming the Boundary Element Method, Wiley, Chichester, 2001.
- [23] Gao, X.W. and Davies, T.G., Boundary Element Programming in Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [24] Banerjee, P.K. and Butterfield, R., Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1981.
- [25] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [26] Banerjee, P.K. and Butterfield, R., Boundary Element Methods in Engineering, McGraw-Hill, London, 1992.
- [27] Kane, J.H., Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics, Prentice-Hall, New York, 1994.
- [28] Bonnet, M., Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids, Wiley, Chichester, 1999.
- [29] Saada, A.S., Elasticity: Theory and Applications, Pergamon unified engineering series, 1974.
- [30] Incropera, F. P. and Dewitt P. D., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Fifth Edition, Wiley, 2002.
- [31] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2<sup>nd</sup> edn, Clarendon Press, Oxford, 1959



- [32] Morse, P.M. and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953
- [33] Pasquetti, R. Caruso, A and Wrobel, L.C. Transient problems using time-dependent fundamental solutions, Boundary Element Methods in Heat Transfer, Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier, London, 1992.
- [34] Boyse, E. William e DiPrima, C. Richard, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, LTC, 2002
- [35] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). "Legendre Functions" and "Orthogonal Polynomials." Chs. 8 and 22 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York, 1972
- [36] Lau, H. T. (Hang Tong), A numerical library in C for scientists and engineers, Boca Raton CRC Press, 1995
- [37] Gautschi, Walter and Cahill F. William, "Exponential Integral and Related Functions" Ch. 5 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York, 1972
- [38] W.J. Mansur, C.A.B. Vasconcellos, N.J.M. Zambrozuski, O.C. Rotunno Filho, Numerical solution for the linear transient heat conduction equation using an Explicit Green's Approach, International Journal of Heat and Mass Transfer 52 (2009) 694–701